ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. A	4. C	5. C	6. A	7. B	8. A	9. B	10. C
11. B	12. D	13. B	14. B	15. B	16. A	17. B	18. B	19. D	20. A
21. C	22. D	23. A	24. C	25. C	26. D	27. B	28. D	29. D	30. B
31. A	32. D	33. A	34. B	35. D	36. A	37. B	38. B	39. D	40. D
41. B	42. C	43. B	44. A	45. D	46. C	47. A	48. B	49. B	50. B

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. Số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$ là

A $\overline{z} = -3 + 2i$. **B** $\overline{z} = 2 - 3i$. **C** $\overline{z} = -3 - 2i$. **D** $\overline{z} = 3 - 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là $\overline{z} = a - bi,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Thể tích khối lập phương có cạnh bằng a là

A $V = 3a$. **B** $V = a^3$. **C** $V = a^2$. **D** $V = 12a$.

Lời giải.

$V = a \cdot a \cdot a = a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = \sin x$?

A $y = -\cos x$. **B** $y = \cos x$. **C** $y = \tan x$. **D** $y = \cot x$.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho $0 < a \neq 1$, $x > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\log_a x^2 = \log_{a^2} x$. **B** $\log_a x^2 = \log_a (2x)$. **C** $\log_a x^2 = 2\log_a x$. **D** $\log_a x^2 = \dfrac{1}{2}\log_a x$.

Lời giải.

Áp dụng định lí "Cho hai số dương $a,\ b$; $a \neq 1$. Với mọi α, ta có $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ ".

Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian Oxy, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x + 3y + 4z + 5 = 0$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A $\vec{u} = (4; 3; 2)$. **B** $\vec{v} = (3; 4; 5)$. **C** $\vec{w} = (2; 3; 4)$. **D** $\vec{u} = (5; 4; 3)$.

Lời giải.

Dựa vào các hệ số đi với các biến $x,\ y,\ z$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là

A $(0; +\infty)$. **B** $[0; +\infty)$. **C** $\mathbb{R}$. **D** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $x > 0$.

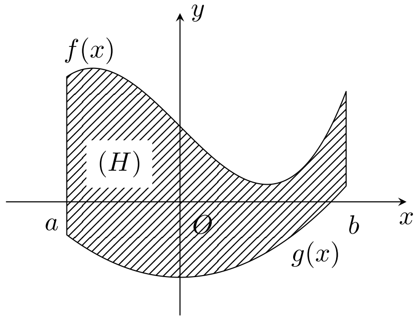
Chọn đáp án A □

Câu 7. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ có diện tích là

A $S = \int\limits_2^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. **B** $S = \int\limits_1^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C** $S = \int\limits_2^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D** $S = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Hình phẳng (H) giới hạn bởi $\begin{cases} (C_1)\colon y = f(x) \\ (C_2)\colon y = g(x) \\ x = a, x = b\,(a < b) \end{cases}$ thì diện tích của (H) được xác đinh bởi công thức $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.



Chọn đáp án B □

Câu 8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 6}{x + 2}$ bằng

A 2. **B** -2. **C** 3. **D** -3.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 6}{x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \frac{6}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \dfrac{2 - 0}{1 + 0} = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$ có các đường tiệm cận là

A $y = 2$ và $x = 2$. **B** $y = 2$ và $x = -2$.

C $y = -2$ và $x = -2$. **D** $y = -2$ và $x = 2$.

Lời giải.

- Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
- Vì $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = -\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = +\infty$) nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Trong không gian Oxy, cho $A(1; -1; 2)$ và $B(-1; 0; 1)$. Tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

A $(2; -1; 1)$. **B** $(-2; -1; -1)$. **C** $(-2; 1; -1)$. **D** $(0; -1; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1-1; 0-(-1); 1-2) = (-2; 1; -1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Mô-đun số phức $z = 4 - 3i$ bằng

A 7. **B** 5. C 1. D 25.

Lời giải.

Ta có $|z| = |4-3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A Hàm số có đúng một điểm cực trị.

B Hàm số có điểm cực tiểu là $x = 0$.

C Hàm số có điểm cực đại là $x = 1$.

D Hàm số có điểm cực đại là $x = 0$ và điểm cực tiểu là $x = -1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vì $f'(x)$ đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" khi x qua $x = -1$ nên hàm số có điểm cực tiểu là $x = -1$.

Vì $f'(x)$ đổi dấu từ "$+$" sang "$-$" khi x qua $x = 0$ nên hàm số có điểm cực đại là $x = 0$.

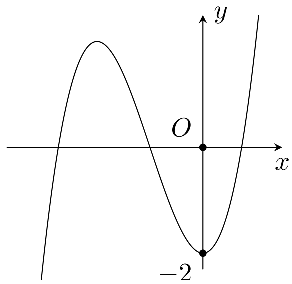
Chọn đáp án D □

Câu 13.

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = x^4 + x^2 - 2$. **B** $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

C $y = x^3 - 3x + 2$. D $y = -x^2 - 3x - 2$.



Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị, ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$ nên loại các hàm $y = x^4 + x^2 - 2$, $y = -x^2 - 3x - 2$. Mặt khác, đồ thị đi qua điểm $(0; -2)$ nên loại hàm $y = x^3 - 3x + 2$.

(Ngoài ra, ta có thể đánh giá dấu của các hệ số a, b, c thông qua hoành độ 2 điểm cực trị và hoành độ trung điểm của hai điểm cực trị. Trong đồ thị này ta còn thấy hàm số có điểm cực tiểu $x = 0$ nên $c = 0$)

Chọn đáp án B □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ $A(1;0;-1)$ đến mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z+6=0$ bằng

A 1. B 3. C $\dfrac{7}{3}$. D $\dfrac{7}{9}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}\left(A,(P)\right) = \dfrac{|1-2\cdot 0-2\cdot(-1)+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ có tâm và bán kính là

A $I(-2;1;-1)$, $R=9$. B $I(2;-1;1)$, $R=3$.
C $I(-2;1;-1)$, $R=3$. D $I(2;-1;1)$, $R=9$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ có tâm $I(2;-1;1)$ và bán kính $R = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2+3} = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1-\sin x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $M=2,\ m=0$. B $M=1,\ m=-1$. C $M=2,\ m=-1$. D $M=1,\ m=0$.

Lời giải.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có $-1\le \sin x\le 1 \Leftrightarrow 1\ge -\sin x\ge -1 \Leftrightarrow 2\ge 1-\sin x\ge 0 \Leftrightarrow 2\ge y\ge 0$.

Vậy $M = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 2$ đạt tại $x = -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; $m = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 0$ đạt tại $x = \dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Thể tích của khối nón có chiều cao $h=4$ và bán kính đáy $R=6$ bằng bao nhiêu?

A $V=144\pi$. B $V=48\pi$. C $V=24\pi$. D $V=8\pi$.

Lời giải.

Thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi 6^2 4 = 48\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tích phân $\displaystyle\int_1^2 e^x\,\mathrm{d}x$ bằng

A $e-e^2$. B e^2-e. C e. D e^{-1}.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 e^x\,\mathrm{d}x = e^x\big|_1^2 = e^2-e$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$.
B) $y = -x^3 - x - 2$.
C) $y = x^4 + 2x^2 + 3$.
D) $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$.

Lời giải.

Hàm nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$ nên loại hàm $y = \dfrac{x-1}{x+3}$. Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị hoặc gần giống chữ "M " hoặc gần giống chữ "W " hoặc là parabol nên loại hàm $y = x^4 + 2x^2 + 3$.

Xét 2 hàm còn lại với lưu ý: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. $(*)$

Hàm $y = -x^3 - x - 2$ có đạo hàm là $y' = -3x^2 - 1 < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn điều kiện $(*)$.

Hàm $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$ có đạo hàm là $y' = 3x^2 + 2x + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $(*)$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ cắt trục tung tại điểm nào sau đây?

A) $(0; -2)$.
B) $(-2; 0)$.
C) $(0; 2)$.
D) $(2; 0)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung khi và chỉ khi điểm đó có hoành độ $x = 0$, thay vào hàm số ta được $y = 0^4 - 30^2 - 2 = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Phương trình $\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$?

A) 1.
B) 3.
C) 2.
D) 4.

Lời giải.

Ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Mặt khác $x \in (-\pi; \pi) \Leftrightarrow -\pi < \dfrac{\pi}{2} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < k < \dfrac{1}{2}$.

Kết hợp $k \in \mathbb{Z}$ ta được $k \in \{-1; 0\}$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

A) 2.
B) -2.
C) -4.
D) 0.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = 2 \notin [-1; 1]. \end{array}\right.$

Mặt khác: $f(-1) = -4,\ f(0) = 0,\ f(1) = -2$.

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y = f(0) = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho $(\mathscr{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1$, $x = 4$. Khi $(\mathscr{H})$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

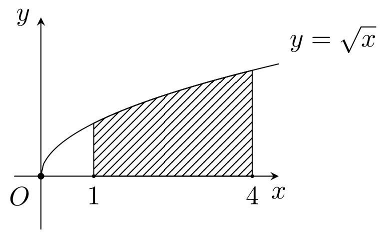
A $\dfrac{15\pi}{2}$. B $\dfrac{15}{2}$. C $\dfrac{14}{3}$. D $\dfrac{14\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin [1;4]$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là

$$V = \pi \int\limits_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \left.\frac{1}{2}x^2\right|_1^4 = \frac{15\pi}{2}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 24. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có bao nhiêu cực trị?

A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Vì phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm đơn nên dấu của y' đổi dấu qua mỗi nghiệm này. Do đó, hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Có bao nhiêu số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau lấy từ tập $X = \{1;2;3;4;5\}$?

A 5^2. B P_5. C A_5^2. D C_5^2.

Lời giải.

Lấy 2 chữ số khác nhau (có tính thứ tự) từ tập có 5 chữ số thì ta lập được một số tự nhiên mà chữ số đầu của nó khác 0.

Vậy có A_5^2 số tự nhiên cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

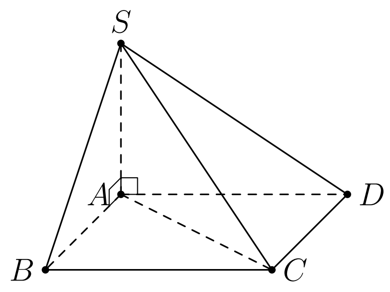
A $\sqrt{2}$. B $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. C 1. D $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ tại A nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$. Do đó

$$\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA}.$$

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có $SA = a$ và $AC = a\sqrt{2}$, suy ra $\tan\alpha = \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



Chọn đáp án D □

Câu 27. Rút ngẫu nhiên cùng lúc 2 chiếc bút từ một hộp chứa 4 bút chì và 5 bút bi. Xác suất để 2 bút rút được đều là bút chì bằng

A $\dfrac{1}{2}$. B $\dfrac{1}{6}$. C $\dfrac{2}{9}$. D $\dfrac{5}{18}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^2$.

Gọi A là biến cố “rút được 2 bút đều là bút chì ”. Khi đó $n(A) = \mathrm{C}_4^2$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z - i| = 4$ là một đường tròn có bán kính bằng

A $2\sqrt{2}$. B $4\sqrt{2}$. C 4. D 2.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ với $x,\ y \in \mathbb{R}$.

Khi đó $|2z - i| = 4 \Leftrightarrow |2x + 2yi - i| = 4 \Leftrightarrow 4x^2 + (2y-1)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 4$.

Vậy tập hợp điểm cần tìm là một đường tròn có bán kính $R = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x - 3y + 2z + 5 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A d nằm trong (P). B d cắt và không vuông góc với (P).

C d vuông góc với (P). D d song song với (P).

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (1;-1;-3)$, mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (3;-3;2)$.

Ta thấy $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)} = 1 \cdot 3 + (-1)\cdot(-3) + (-3)\cdot 2 = 0$ nên đường thẳng d hoặc song song hoặc nằm trong (P).

Mặt khác, lấy $M(-1;0;1) \in d$ thì $M \notin (P)$ vì $3\cdot(-1) - 3\cdot 0 + 2\cdot 1 + 5 = 0$ là sai.

Vậy đường thẳng d song song với (P).

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho hình lập phương có cạnh bằng 2. Mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương có bán kính là

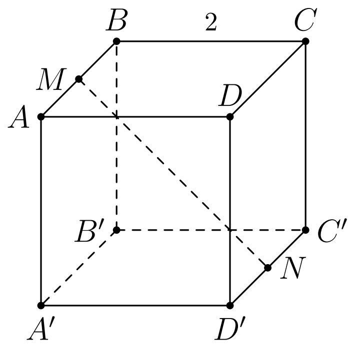
A $2\sqrt{2}$. **B** $\sqrt{2}$. **C** 1. **D** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và $C'D'$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương nên nó có đường kính là MN.

Vậy bán kính cần tìm là $R = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{AD'}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

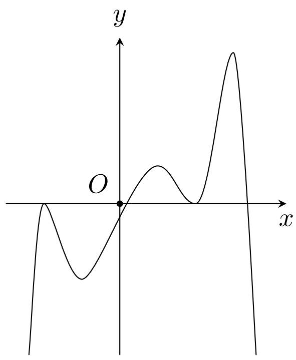


Chọn đáp án B □

Câu 31.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A 2. **B** 4. **C** 3. **D** 5.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy $f'(x)$ liên tục và đổi dấu 2 lần.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho $\log_a(b+1) > 0$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A $b(a+1) > 0$. **B** $a + b < 1$. **C** $a + b > 1$. **D** $(a-1)b > 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $0 < a \neq 1$, $b > -1$.

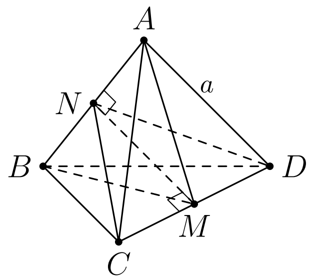
Ta có $\log_a(b+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ b + 1 > a^0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b + 1 < a^0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ -1 < b < 0 \end{cases} \end{array}\right.$. Suy ra $(a-1)b > 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng 4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A $2\sqrt{2}$. **B** 2. **C** 3. **D** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Khi đó $\triangle ABM$ cân tại M, $\triangle CDN$ cân tại N.

Do đó $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp CD \end{cases}$, suy ra MN là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng AB và CD.

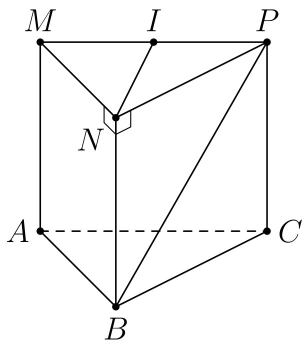
Xét $\triangle AMN$ vuông tại N có $AN = \dfrac{AB}{2} = 2$, $AM = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ nên $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.MNP$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi I là trung điểm cạnh MP. Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng BP và NI bằng

A $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.



Giả sử tất cả các cạnh đều bằng a. Hình lăng trụ tam giác đều là hình lăng trụ đứng có 2 đáy là tam giác đều nên $BN \perp (MNP)$.

Ta có $\cos\left(\widehat{BP, NI}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{NI}}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{NI}\right|}{BP \cdot NI}$.

Mặt khác $BP = a\sqrt{2}$, $NI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{NI} = \left(\overrightarrow{NP} - \overrightarrow{NB}\right) \cdot \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NI} - \overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NI}$

$= NP \cdot NI \cdot \cos\widehat{PNI} - 0 = a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = \dfrac{3a^2}{4}$.

Vậy $\cos\left(\widehat{BP, NI}\right) = \dfrac{\dfrac{3a^2}{4}}{a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x + 2y - 2z + 4 = 0$ cắt nhau theo một đường tròn có chu vi bằng

A 10π. **B** 16π. **C** 4π. **D** 8π.

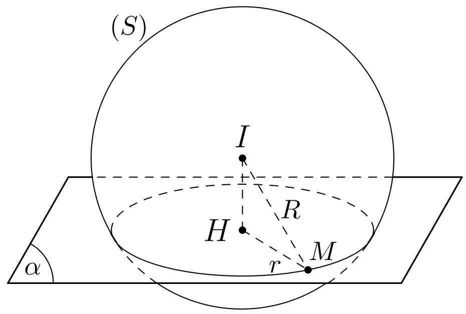
Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$ và bán kính

$$R=\sqrt{1^2+2^2+0^2-(-20)}=5.$$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) là

$$IH=\mathrm{d}\left(I,(\alpha)\right)=\frac{|1+2\cdot 2-2\cdot 0+4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3.$$



Do đó, bán kính đường tròn thiết diện là

$$r=\sqrt{R^2-IH^2}=4.$$

Vậy chu vi của đường tròn thiết diện là $C=2\pi r=8\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Khoảng cách từ điểm A đến trục hoành bằng

A $\sqrt{13}$. **B** $\sqrt{5}$. **C** $\sqrt{10}$. **D** 1.

Lời giải.

Điểm A có hình chiếu vuông góc lên trục Ox là $A'(1;0;0)$ nên khoảng cách cần tìm là $AA'=\sqrt{(1-1)^2+(0-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{13}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho lăng trụ tam giác $ABC.MNP$ có thể tích V, gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACM, AMB, BCM. Gọi V_1 là thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $8V=81V_1$. **B** $V=81V_1$. **C** $V=27V_1$. **D** $V=9V_1$.

Lời giải.

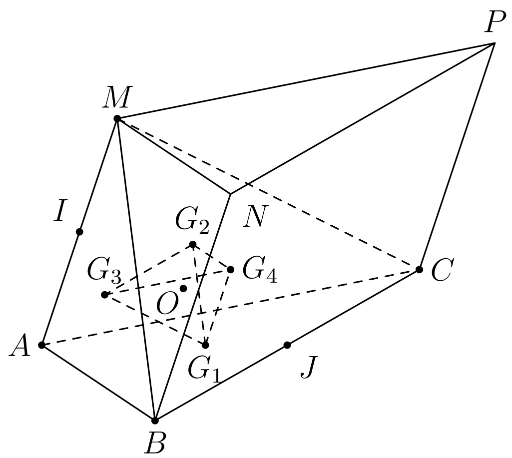
Gọi V_2 là thể tích khối tứ diện $MABC$.

Khi đó $V_2=\dfrac{1}{3}V$. (1)

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AM, BC; gọi O là trung điểm của IJ thì O là tâm của tứ diện $MABC$.

Ta có $\begin{cases}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\ 3\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG_1}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM}$.



Chứng minh tương tự cho các điểm G_2, G_3, G_4 dẫn đến tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ là ảnh của tứ diện $MBCA$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $-\dfrac{1}{3}$ nên tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ đồng dạng với tứ diện $MABC$ theo tỉ số $\dfrac{1}{3}$. Mà tỉ số thể tích của hai khối đa diện đồng dạng bằng lập phương tỉ số đồng dạng

nên
$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow V_2 = 27V_1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{3}V = 27V_1$ hay $V = 81V_1$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x)\sin 2x\,\mathrm{d}x$ bằng

A 2018. B 1009. C -1009. D -2018.

Lời giải.

Đặt $t = \cos 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\sin 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \sin 2x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1,\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $I = -\frac{1}{2}\int\limits_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 2018 = 1009$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^3 - 2x^2 - 3x + 4) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) = 0$ là

A 0. B 3. C 2. D 1.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$\log_2(x^3 - 2x^2 - 3x + 4) - \log_2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x^3 - 2x^2 - 3x + 4) = \log_2(x - 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $9^x - 2018 \cdot 3^x + 2016 = 0$ bằng

A $\log_3 1008$. B $\log_3 2018$. C $\log_3 1009$. D $\log_3 2016$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2018t + 2016 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1009 + \sqrt{1016065} \\ t = 1009 - \sqrt{1016065} \end{array}\right.$$

Cả hai nghiệm này đều thỏa mãn $t > 0$.

Khi đó $3^{x_1 + x_2} = 3^{x_1} \cdot 3^{x_1} = t_1 \cdot t_2 = 2016 \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_3 2016$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Với số nguyên dương n thỏa mãn $\mathrm{C}_n^2 - n = 27$, trong khai triển $\left(x + \dfrac{3}{x^2}\right)^n$ số hạng không chứa x là

(A) 84. (B) 2268. (C) 61236. (D) 27.

Lời giải.

Với $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\mathrm{C}_n^2 - n = 27 \Leftrightarrow \frac{n!}{2! \times (n-2)!} - n = 27 \Leftrightarrow n(n-1) - 2n = 54 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 54 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 9 \text{ (nhận)} \\ n = -6 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Khi đó, số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển của $\left(x + \dfrac{3}{x^2}\right)^9$ là

$$T_{k+1} = \mathrm{C}_9^k x^{9-k} \left(\frac{3}{x^2}\right)^k = 3^k \mathrm{C}_9^k x^{9-3k},\ 0 \leq k \leq 9, k \in \mathbb{N}$$

Số hạng không chứa x ứng với $9 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 3$ (thỏa mãn $0 \leq k \leq 9, k \in \mathbb{N}$).

Vậy số hạng cần tìm là $T_4 = 3^3 \mathrm{C}_9^3 = 2268$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Biết hàm số $y = (x+m)(x+n)(x+p)$ không có cực trị. Giá trị nhỏ nhất của $F = m^2 + 2n - 4p$ là

(A) 1. (B) 0. (C) -1. (D) -2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là

$$(x+m)(x+n)(x+p) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = -n \\ x = -p. \end{array}\right.$$

Hàm số đã cho không có cực trị khi và chỉ khi $m = n = p$.

Khi đó $F = m^2 - 2m = (m-1)^2 - 1 \geq -1$.

Vậy $\min F = -1$ đạt được khi $m = n = p = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho $\displaystyle\int_0^2 (1-2x)f'(x)\,\mathrm{d}x = 3f(2) + f(0) = 2018$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 0. (B) 1009. (C) 2018. (D) 4036.

Lời giải.

Ta có $2018 = \displaystyle\int_0^2 (1-2x)f'(x)\,\mathrm{d}x = (1-2x)f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 (-2)f(x)\,\mathrm{d}x = -3f(2) - f(0) + 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$

Suy ra $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2018.$

Đặt $x = 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$, đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = 2 \Rightarrow t = 1$, ta được

$$2018 = 2\int\limits_0^1 f(2t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 1009$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho 2 cấp số cộng (u_n): $1; 6; 11; \ldots$ và (v_n): $4; 7; 10; \ldots$. Mỗi cấp số có 2018 số. Hỏi có bao nhiêu số có mặt trong cả hai dãy số trên

A 403. **B** 402. **C** 672. **D** 504.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_i = 1 + (i-1)5 = 5i - 4$ với $1 \le i \le 2018,\ i \in \mathbb{N}^*$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (v_n) là $v_j = 4 + (j-1)3 = 3j + 1$ với $1 \le j \le 2018,\ j \in \mathbb{N}^*$.

Tồn tại số hạng chung của 2 cấp số cộng trong 2018 số hạng đầu của mỗi cấp số

$\Leftrightarrow 5i - 4 = 3j + 1 \Leftrightarrow 3j = 5(i-1)$

$\Rightarrow j \vdots 5 \Rightarrow j \in \{5; 10; \ldots; 2015\}$. Khi đó $3 \le i - 1 < j$.

Mặt khác dãy số $5; 10; \ldots; 2015$ cũng là một cấp số cộng có số hạng đầu $w_1 = 5$, số hạng cuối $w_n = 2015$ và công sai $d = 5$.

Ta có $w_n = w_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 2015 = 5 + (n-1)5 \Leftrightarrow n = 403$.

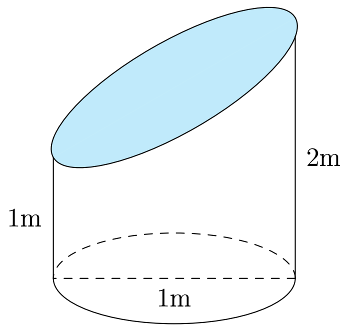
Vậy có 403 số hạng chung cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 45.

Một khối gỗ hình trụ đường kính 1 m và chiều cao 2 m. Người ta đã cắt khối trụ như hình vẽ bên. Thể tích khối gỗ còn lại là

A $\dfrac{3\pi}{2}$ m^3. **B** $\dfrac{\pi}{8}$ m^3. **C** $\dfrac{5\pi}{16}$ m^3. **D** $\dfrac{3\pi}{8}$ m^3.



Lời giải.

Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của cả khối gỗ hình trụ khi chưa cắt, phần gỗ đã bị cắt đi, phần gỗ còn lại.

Ta thấy $V_1 = \dfrac{1}{4}V$, suy ra

$$V_2 = \frac{3}{4}V = \frac{3}{4}\pi R^2 \cdot h = \frac{3}{4}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{3\pi}{8}\ \mathrm{m}^3.$$

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1$, $f(2) = e^4$. Khi đó $f(1)$ bằng

A $e^{\frac{3}{4}}$. **B** e. **C** $e^{\frac{3}{2}}$. **D** e^2.

Lời giải.

Từ giả thiết ta suy ra $f(x) > 0,\ \forall x \in [0;2]$.

$[f(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0 \Rightarrow [f(x)]^2 = f(x)\cdot f''(x) - [f'(x)]^2 \overset{f\neq 0}{\Rightarrow} \dfrac{f''\cdot f - (f')^2}{f^2} = 1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{f'}{f}\right)' = 1 \Rightarrow \dfrac{f'}{f} = x + C_1 \Rightarrow (\ln|f|)' = x + C_1 \Rightarrow \ln|f| = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$

$\Rightarrow |f(x)| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2} \overset{f\geq 0}{\Rightarrow} f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2}$.

Vì $f(0) = 1,\ f(2) = e^4$ nên $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + x}$.

Vậy $f(1) = e^{\frac{3}{2}}$.

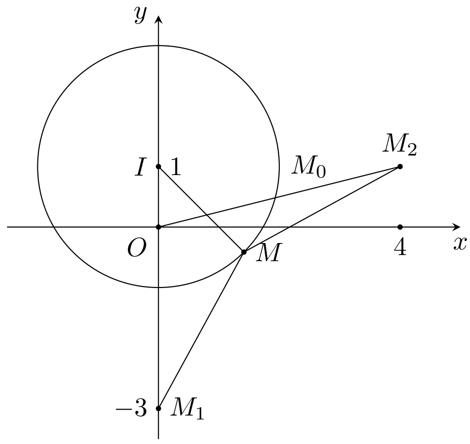
Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho các số phức $z_1 = -3i$, $z_2 = 4 + i$ và z thỏa mãn $|z - i| = 2$. Khi biểu thức $T = |z - z_1| + 2|z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng phần thực và phần ảo của z là

A $\dfrac{5 + 10\sqrt{13}}{17}$. **B** $\dfrac{5 - 10\sqrt{13}}{17}$. **C** $\dfrac{1 + 2\sqrt{13}}{17}$. **D** $\dfrac{1 - 2\sqrt{13}}{17}$.

Lời giải.

Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn của $z_1,\ z_2,\ z$ thì M thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ như hình vẽ.



Ta có $\triangle IMM_1 \backsim \triangle IOM$ tỉ số bằng 2, suy ra $MM_1 = 2OM$.

$T = |z - z_1| + 2|z - z_2| = MM_1 + 2MM_2 = 2OM + 2MM_2 = 2(OM + MM_2) \geq 2OM_2$.

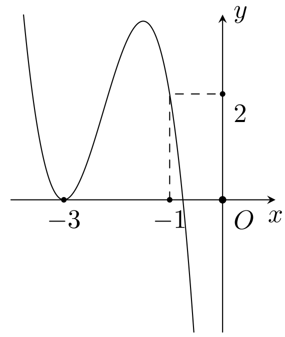
Vậy T nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv M_0 = OM_2 \cap (\mathscr{C})$, suy ra tọa độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{4}\ (0 < y < 1) \\ x^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 17y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1 + 2\sqrt{13}}{17}\ \text{(nhận)} \\ y = \dfrac{1 - 2\sqrt{13}}{17}\ \text{(loại)} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 + 8\sqrt{13}}{17} \\ y = \dfrac{1 + 2\sqrt{13}}{17}. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

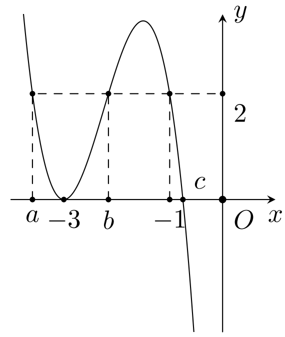
Câu 48.

Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x) - 2f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A 6. **B** 4. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.



Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = -3$, nghiệm đơn $x = c \in (-1; 0)$ và phương trình $f(x) = 2$ có 3 nghiệm đơn $x = a$, $x = b$, $x = -1$ với $a < b < -1$.

Với x thỏa mãn $x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$, ta có
$y = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{xf(x)\left[f(x)-2\right]} = \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{kx(x+3)^2(x-c)(x+1)(x-a)(x-b)}$
(với $k \neq 0$).

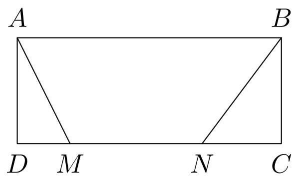
Tính giới hạn suy ra các tiệm cận đứng là $x = -3$, $x = 0$, $x = a$, $x = b$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Trên sa mạc có một khu đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 70$ km, chiều rộng $AD = 10$ km. Vận tốc trung bình của xe máy trên khu đất này là 20 km/h, riêng đi trên cạnh CD thì vận tốc là 40 km/h. Một người đi xe máy xuất phát từ A muốn đến B thì cần ít nhất bao nhiêu giờ?

A $\dfrac{7}{2}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{3}+7}{4}$. **C** $\dfrac{20}{\sqrt{3}}$. **D** $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.



• Nếu không đi trên cạnh CD thì cách di chuyển nhanh từ A đến B là di chuyển trên đoạn AB, khi đó mất 3,5 giờ.

• Nếu có di chuyển trên CD giả sử từ A đi đến M, M đến N và N đến B (như hình vẽ), Đặt $MD = m$, $NC = n$. Ta có thời gian di chuyển từ A đến B là

$$t = \frac{\sqrt{100+m^2} + \sqrt{100+n^2}}{20} + \frac{70-(m+n)}{40}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, ta có

$$t \geq \frac{\sqrt{20^2+(m+n)^2}}{20} + \frac{70-(m+n)}{40},$$

dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = n$.

Đặt $m + n = x$, xét hàm $f(x) = \dfrac{\sqrt{400+x^2}}{20} + \dfrac{70-x}{40}$, $x \in [0, 70]$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{20\sqrt{400+x^2}} - \dfrac{1}{40}$, $x \in [0, 70]$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{400+x^2} = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

Bảng biến thiên của $f(x)$

x	0		$\dfrac{20}{\sqrt{3}}$		70
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{11}{4}$	$\searrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}+7}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{50}}{2}$

$\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $f\left(\dfrac{20}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}+7}{4}$.

Vậy thời gian ngắn nhất là $\dfrac{2\sqrt{3}+7}{4}$ khi $m = n = \dfrac{x}{2} = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$. Hai mặt cầu $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+9=0$ và $(S_2)\colon x^2+y^2+z^2-8x-4z+9=0$ cắt nhau theo một đường tròn $(\mathscr{C})$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA?

A 1. B Vô số. C 3. D 4.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng chứa $(\mathscr{C})$ là

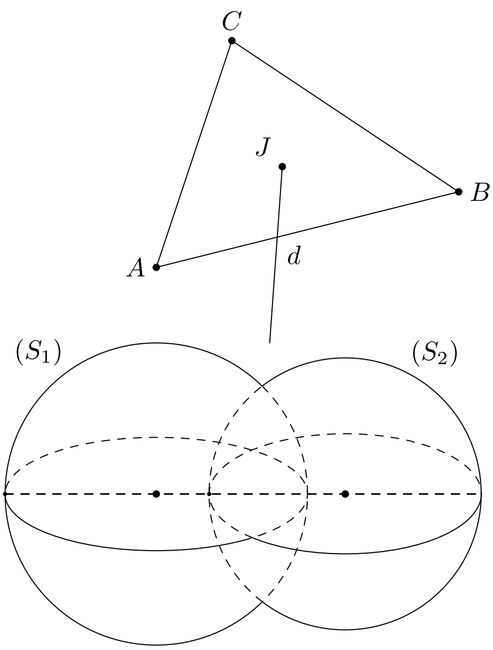
$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+9 = x^2+y^2+z^2-8x-4z+9$

$\Leftrightarrow 6x-4y-2z=0 \qquad (P)$.

Phương trình $(ABC)\colon x+y+z-3=0$.

Ta thấy $\triangle ABC$ là tam giác đều có tâm là $J(1;1;1)$, đồng thời mp(P) qua J và vuông góc với (ABC) nên (P) chứa trục d của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Mỗi điểm trên d là tâm của một mặt cầu tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA.

Vậy có vô số mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Chọn đáp án B □