ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. B	5. D	6. B	7. A	8. A	9. A	10. A
11. A	12. D	13. A	14. C	15. A	16. A	17. A	18. D	19. B	20. A
21. C	22. D	23. B	24. C	25. C	26. C	27. D	28. B	29. B	30. C
31. C	32. C	33. A	34. B	35. A	36. D	37. C	38. B	39. D	40. D
41. D	42. A	43. B	44. A	45. D	46. A	47. B	48. A	49. A	50. B

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng một điểm cực trị?

A. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$.
B. $y = -x^4 - 3x^2 + 4$.
C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.
D. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = -x^4 - 3x^2 + 4$. Ta có $y' = -4x^3 - 6x$. Phương trình $-4x^3 - 6x = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$. Lại có $y' = -4x^3 - 6x$ đổi dấu qua điểm có hoành độ $x = 0$. Suy ra, hàm số $y = -x^4 - 3x^2 + 4$ có đúng một điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \dfrac{1}{2}\right]$ là

A. $-\dfrac{13}{3}$.
B. 1.
C. -3.
D. $-\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y = x - 2 + \dfrac{1}{x - 1}$. Suy ra $y' = 1 - \dfrac{1}{(x - 1)^2}$. Xét phương trình

$$1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 2 & \text{(loại)} \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Xét hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \dfrac{1}{2}\right]$, ta có: $y(-2) = -\dfrac{13}{3}, y(0) = -3, y(0{,}5) = -\dfrac{7}{2}$.
Suy ra, $\max\limits_{x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]} y = -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Hệ số góc k của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm $M(1; 2)$ là

A. $k = 12$.
B. $k = 3$.
C. $k = 5$.
D. $k = 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2$. Tại điểm M có hoành độ $x = 1$ thì $k = y'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Hàm số nào sau đây là hàm số mũ?

A. $y = (\sin x)^3$. B. $y = 3^x$. C. $y = x^3$. D. $y = \sqrt[3]{x}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa hàm số mũ, $y = 3^x$ là hàm số mũ.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho ba số dương a, b, c, $a \neq 1, b \neq 1$, và số thực $\alpha \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A $\log_a b^\alpha = \frac{1}{\alpha} \log_a b$.

(B) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

(C) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

(D) $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$.

Lời giải.

Theo quy tắc tính lô-ga-rit và quy tắc đổi cơ số ta có

- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.
- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.
- $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $\int 2f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất của nguyên hàm, ta có

- $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ k \neq 0$.
- $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$, $a \leq b$ có diện tích S là

A $S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

(B) $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $S = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

(D) $S = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$, $a \leq b$ có diện tích S là $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho số phức $z = -4 + 5i$. Biểu diễn hình học của z là điểm có tọa độ

A $(-4; 5)$. B $(-4; -5)$. C $(4; -5)$. D $(4; 5)$.

Lời giải.

Biểu diễn hình học của $z = -4 + 5i$ là điểm có tọa độ $(-4; 5)$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là

A $V = \dfrac{1}{3}Bh$. B $V = 3Bh$. C $V = \dfrac{1}{2}Bh$. D $V = Bh$.

Lời giải.

Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là $V = \dfrac{1}{3}Bh$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Thể tích khối nón có chiều cao h, bán kính đường tròn đáy r là

A $V = \dfrac{1}{2}\pi r^2 h$. B $V = \pi r^2 h$. C $V = \dfrac{4}{3}\pi r^2 h$. D $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải.

Thể tích khối nón có chiều cao h, bán kính đường tròn đáy r là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong không gian Oxy, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $r = 4$?

A $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$. B $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$.

C $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. D $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $r = 4$ là

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2 = 16 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16.$$

Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - z + 1 = 0$. Tọa độ một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A $\vec{n} = (2; -1; 1)$. B $\vec{n} = (2; 0; 1)$. C $\vec{n} = (2; 0; -1)$. D $\vec{n} = (2; -1; 0)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; 0; -1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+8}{4} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z}{1}$. Khi đó một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là

A $(4; -2; 1)$. **B** $(4; 2; -1)$. **C** $(4; -2; -1)$. **D** $(4; 2; 1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là $(4; -2; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Có bao nhiêu cách chọn 5 cầu thủ từ 11 cầu thủ trong một đội bóng để thực hiện đá 5 quả luân lưu 11 m, theo thứ tự quả thứ nhất đến quả thứ năm.

A A_{11}^5. **B** C_{11}^5. **C** $\mathrm{A}_{12}^2 \cdot 5!$. **D** C_{10}^5.

Lời giải.

Số cách chọn 5 cầu thủ từ 11 cầu thủ và có thứ tự là một chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử: A_{11}^5.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$. **B** $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) \cdot P(B)$.

C $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$. **D** $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Lời giải.

Với A, B là hai biến cố xung khắc thì $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho cấp số cộng có $u_5 = 21, u_6 = 27$. Tìm công sai d.

A $d = 5$. **B** $d = 7$. **C** $d = 8$. **D** $d = 6$.

Lời giải.

Theo định nghĩa cấp số cộng ta có $d = u_6 - u_5 = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$. **B** $y = x^3 + 4x + 1$. **C** $y = x^2 + 1$. **D** $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải.

Ta có

- $y = \dfrac{2x-1}{x+2} \Rightarrow y' = \dfrac{-3}{(x+2)^2} < 0, \forall x \neq 2$. Do đó hàm số nghịch biến trên tập xác định.
- $y = x^3 + 4x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên tập xác định.
- $y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x$. Hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- $y = x^4 + 2x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 + 4x$. Hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho a là số thực dương khác 4. Tính $I = \log_{\frac{a}{4}}\left(\dfrac{a^3}{64}\right)$

A $I = 3$. **B** $I = \dfrac{1}{3}$. **C** $I = -3$. **D** $I = \dfrac{-1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $I = \log_{\frac{a}{4}}\left(\dfrac{a^3}{64}\right) = \log_{\frac{a}{4}}\left(\dfrac{a}{4}\right)^3 = 3\log_{\frac{a}{4}}\dfrac{a}{4} = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2018x$.

A $\dfrac{\cos 2018x}{2018} + C$. **B** $-\dfrac{\cos 2018x}{2019} + C$.

C $-\dfrac{\cos 2018x}{2018} + C$. **D** $2018 \cdot \cos 2018x + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\int \sin 2018x \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos 2018x}{2018} + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)(2+i)z + 1 - i = (5-i)(1+i)$. Tính mô-đun của số phức $w = 1 + 2z + z^2$.

A 100. **B** $\sqrt{10}$. **C** 5. **D** 10.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$(1+3i)z + 1 - i = 6 + 4i \Leftrightarrow z = \frac{5+5i}{1+3i} \Leftrightarrow z = 2 - i.$$

Suy ra $w = 8 - 6i$. Vậy $|w| = 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC.

A $x - 2y - 5z = 0$. **B** $x - 2y - 5z - 5 = 0$.

C $x - 2y - 5z + 5 = 0$. **D** $2x - y + 5z - 5 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1;-2;-5)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

$$1 \cdot (x-2) - 2 \cdot (y-1) - 5(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5z - 5 = 0.$$

Chọn đáp án B □

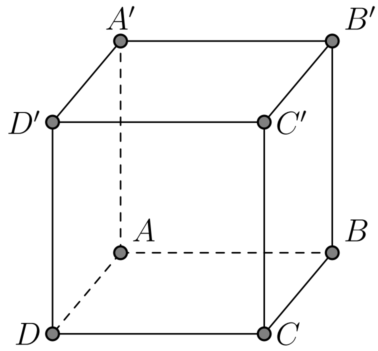
Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 10. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$.

A $\sqrt{10}$. **B** 100. **C** 10. **D** 5.

Lời giải.

Ta có $(ADD'A') \parallel (BCC'B')$

$$\Rightarrow d\left((ADD'A');(BCC'B')\right) = d\left(A;(BCC'B')\right) = AB = 10.$$



Chọn đáp án C □

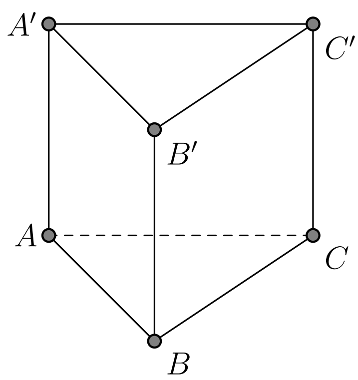
Câu 25. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = \sqrt{3}$ và $AA' = 1$. Tính góc tạo bởi đường thẳng AC' và mặt phẳng (ABC).

A 45°. B 60°. C 30°. D 75°.

Lời giải.

Ta có $(AC',(ABC)) = (AC',AC) = \widehat{CAC'}$.

Lại có $\tan\widehat{CAC'} = \dfrac{CC'}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra $\widehat{CAC'} = 30°$.



Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_5 = 2$ và $u_9 = 6$. Tính u_{21}.

A 18. B 54. C 162. D 486.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 \cdot q^4 = 2 \\ u_1 \cdot q^8 = 6 \end{cases} \Rightarrow q^4 = 3.$

Lại có $u_{21} = u_1 \cdot q^{20} = u_1 \cdot q^8 \cdot q^{12} = u_9 \cdot (q^4)^3 = 6 \cdot 27 = 162.$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

A 2. B 0. C 3. D 1.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = (-\infty;1] \setminus \{0\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{1}=0.$$

Do đó đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=0$. Ta lại có

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Do đó đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng. Vậy số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 1.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-2)$ và $B(4;3;2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) đường kính AB.

A $(x+3)^2+(y+2)^2+z^2=24$.
B $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=6$.
C $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=24$.
D $(x+3)^2+(y+2)^2+z^2=6$.

Lời giải.

Ta có mặt cầu (S) đường kính AB có tâm $I(3;2;0)$ là trung điểm AB và có bán kính là $R=\frac{AB}{2}=\sqrt{6}$. Do đó phương trình mặt cầu (S) đường kính AB là $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m-1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A $m=4\pm\sqrt{3}$.
B $m=4\pm\sqrt{10}$.
C $m=2\pm\sqrt{10}$.
D $m=2\pm\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{2x+1}{x+1}=x+m-1\Leftrightarrow x^2+(m-2)x+m-2=0, x\neq-1, \tag{1}$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1, nghĩa là

$$\begin{cases}(-1)^2+(m-2)\cdot(-1)+m-2\neq0\\(m-2)^2-4(m-2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\neq0\\(m-2)(m-6)>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>6\\m<2.\end{array}\right. \tag{2}$$

Khi đó giao điểm của d và (C) là $A(x_1;x_1+m-1)$, $B(x_2;x_2+m-1)$, với x_1,x_2 là hai nghiệm của (1).

Ta có

$$AB^2=2(x_2-x_1)^2=2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=2m^2-16m+24.$$

Kết hợp với giả thiết ta có

$$AB^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow 2m^2 - 16m + 24 = 12 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \pm \sqrt{10}.$$

Hai giá trị trên của m đều thỏa mãn (2).

Chọn đáp án B □

Câu 30. Hai điểm M, N lần lượt thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng

A $8\sqrt{2}$. B 2017. C 8. D 4.

Lời giải.

Ta có $y = 3 + \dfrac{8}{x-3}$. Đặt $\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y - 3 \end{cases}$, ta có $Y = \dfrac{8}{X}$.

Gọi $M\left(X_1; \dfrac{8}{X_1}\right)$ thuộc nhánh trái, $N\left(X_2; \dfrac{8}{X_2}\right)$ thuộc nhánh phải của đồ thị hàm số, với $X_1 < 0 < X_2$. Ta có

$$\begin{aligned} & MN^2 = (X_2 - X_1)^2 + 64\left(\frac{1}{X_2} - \frac{1}{X_1}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & MN^2 \ge 2\sqrt{(X_2 - X_1)^2 \cdot 64\left(\frac{1}{X_2} - \frac{1}{X_1}\right)^2} \\ \Leftrightarrow\ & MN^2 \ge 16\left|(X_2 - X_1)\left(\frac{1}{X_2} - \frac{1}{X_1}\right)\right| \\ \Leftrightarrow\ & MN^2 \ge 16\frac{(X_2 - X_1)^2}{|X_1X_2|} \\ \Leftrightarrow\ & MN^2 \ge 16\frac{-4X_1X_2}{-X_1X_2} = 64. \end{aligned}$$

Do đó $MN \ge 8$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} X_2 = -X_1 \\ (X_2 - X_1)^2 = 64\left(\dfrac{1}{X_2} - \dfrac{1}{X_1}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = -2\sqrt{2} \\ X_2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy với $M = \left(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$, $N = \left(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ thì MN có độ dài ngắn nhất bằng 8.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho phương trình $8^{x+1} + 8 \cdot (0,5)^{3x} + 3 \cdot 2^{x+3} = 125 - 24 \cdot (0,5)^x$. Khi đặt $t = 2^x + \dfrac{1}{2^x}$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A $8t^3 - 3t - 12 = 0$. B $8t^3 + 3t^2 - t - 10 = 0$.

C $8t^3 - 125 = 0$. D $8t^3 + t - 36 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 8^{x+1}+8\cdot(0,5)^{3x}+3\cdot 2^{x+3}=125-24\cdot(0,5)^{x}\\
\Leftrightarrow\quad & 8\cdot 2^{3x}+8\cdot\frac{1}{2^{3x}}+24\cdot 2^{x}+24\cdot\frac{1}{2^{x}}-125=0\\
\Leftrightarrow\quad & 8\left(2^{3x}+\frac{1}{2^{3x}}\right)+24\left(2^{x}+\frac{1}{2^{x}}\right)-125=0.
\end{aligned}$$

Đặt $t=2^x+\frac{1}{2^x}$, $t\geq 2$, ta có $2^{3x}+\frac{1}{2^{3x}}=t^3-3t$, phương trình đã cho trở thành

$$8(t^3-3t)+24t-125=0\Leftrightarrow 8t^3-125=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 32. Biết $\int\limits_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\,\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A $T=10$. B $T=9$. C $T=8$. D $T=11$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x^2+9\right)\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2+9}{2}.\end{cases}$

Suy ra $\int\limits_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2+9}{2}\ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^4-\int\limits_0^4\frac{x^2+9}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x=25\ln 5-9\ln 3-8.$

Do đó $a=25$, $b=-9$, $c=-8$ nên $T=8$.

Chọn đáp án C □

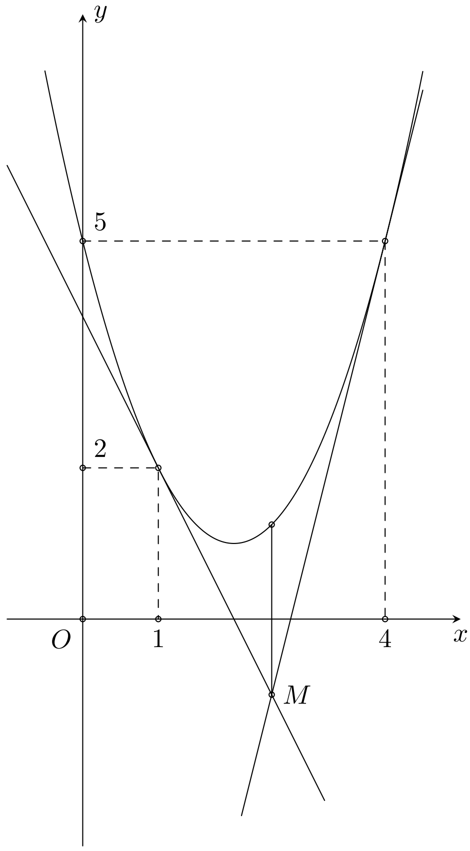
Câu 33. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(P)\colon y=x^2-4x+5$ và các tiếp tuyến của (P) tại $A(1;2)$ và $B(4;5)$

A $\frac{9}{4}$. B $\frac{4}{9}$. C $\frac{9}{8}$. D $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=2x-4$.

Tiếp tuyến của (P) tại A và B lần lượt là $y=-2x+4, y=4x-11$, giao điểm của hai tiếp tuyến là $M\left(\frac{5}{2};-1\right)$.



Khi đó, dựa và hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm

$$S = \int\limits_1^{\frac{5}{2}} \left(x^2 - 4x + 5 + 2x - 4\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{5}{2}}^{4} \left(x^2 - 4x + 5 - 4x + 11\right)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho số phức $z = a + bi, a, b \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $|z + 2 + 5i| = 5$ và $z \cdot \overline{z} = 82$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A 10. **B** -8. **C** -35. **D** -7.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} \sqrt{(a+2)^2 + (b+5)^2} = 5 \\ a^2 + b^2 = 82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-5b - 43}{2} & (1) \\ a^2 + b^2 = 82. & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được

$$29b^2 + 430b + 1521 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -9 \\ b = \dfrac{-169}{29}. \end{array}\right.$$

Vì $b \in \mathbb{Z}$ nên $b = -9$, suy ra $a = 1$. Do đó $P = a + b = -8$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ cm và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7$ cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Tính diện tích của thiết diện được tạo thành.

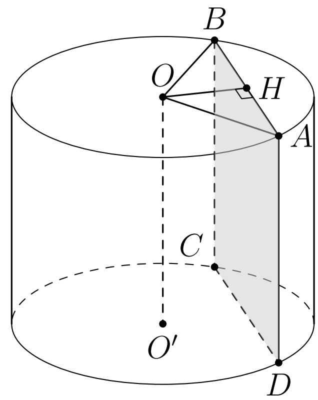
A $S = 56\text{cm}^2$. **B** $S = 55\text{cm}^2$. **C** $S = 53\text{cm}^2$. **D** $S = 46\text{cm}^2$.

Lời giải.

Gọi O, O' là tâm của hai đáy của hình trụ và (P) là mặt phẳng song song với trục và cách trục OO' một khoảng 3 cm.

Mặt phẳng (P) cắt hai hình tròn đáy (O), (O') theo hai dây cung lần lượt là AB, CD và cắt mặt xung quanh theo hai đường sinh là AD, CD.

Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.



Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $OH \perp AB, OH \perp AD \Rightarrow OH \perp (ABCD)$. Suy ra $\mathrm{d}(OO', (P)) = \mathrm{d}(O, (ABCD)) = OH = 3$ cm.

Khi đó $AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$, $AD = OO' = h = 7$ cm.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 56$ cm^2.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Tính khoảng cách giữa SC và AB biết rằng $SO = a$ và vuông góc với mặt đáy của hình chóp.

A a. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{2a}{5}$. **D** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

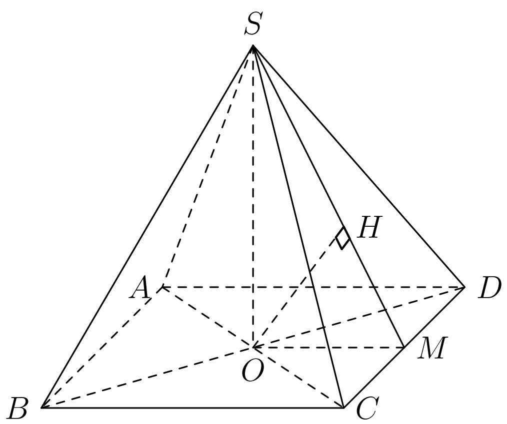
Từ giả thiết suy ra hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Ta có $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$, do đó

$$\mathrm{d}(SC, AB) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)).$$

Mặt khác O là trung điểm AC nên

$$\mathrm{d}(A, (SCD)) = 2\,\mathrm{d}(O, (SCD)).$$



Như vậy $\mathrm{d}(SC, AB) = 2\,\mathrm{d}(O, (SCD))$.

Gọi M là trung điểm CD, ta có $OM \perp CD$ và $OM = \dfrac{a}{2}$.

Kẻ $OH \perp SM$ với $H \in SM$, khi đó $OH \perp (SCD)$.

Xét tam giác $\triangle SOM$ vuông tại O, ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2}.$$

Từ đó $OH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\mathrm{d}(SC, AB) = 2OH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Có hai hộp: Hộp I đựng 4 gói quà màu đỏ và 6 gói quà màu xanh, hộp II đựng 2 gói quà màu đỏ và 8 gói quà màu xanh. Gieo một con súc sắc, nếu được mặt 6 chấm thì lấy một gói quà từ hộp I, nếu được mặt khác thì lấy một gói quà từ hộp II. Tính xác suất để lấy được gói quà màu đỏ.

A $\dfrac{23}{30}$. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** $\dfrac{7}{30}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Xác suất lấy được gói quà màu đỏ trong hộp 1 là $\mathrm{P}(A_1) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

Xác suất lấy được gói quà màu đỏ trong hộp 2 là $\mathrm{P}(A_2) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.

Xác suất gieo được mặt sáu chấm là $\mathrm{P}(C) = \dfrac{1}{6}$, gieo được một trong 5 mặt còn lại là $\mathrm{P}\left(\overline{C}\right) = \dfrac{5}{6}$.

Do đó xác suất lấy được gói quà màu đỏ là

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{30}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị nội tiếp đường tròn bán kính bằng 1.

A $m = 1$, $m = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. **B** $m = 0$, $m = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

C $m = 0$, $m = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. **D** $m = 1$, $m = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m+1. \end{array}\right.$ (1)

Đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, vậy ta phải có $m > -1$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m+1} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = m^2 \\ y = -2m - 1. \end{array}\right.$$

Như vậy $A(0; m^2)$, $B(\sqrt{m+1}; -2m-1)$, $C(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho. Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{m+1}; -m^2 - 2m - 1\right) \\ \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{m+1}; -m^2 - 2m - 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{m+1+(m+1)^4} \\ AC = \sqrt{m+1+(m+1)^4} \end{cases} \Rightarrow AB = AC.$$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC, suy ra $AH \perp BC$ và $H(0;-2m-1)$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = (0;-m^2-2m-1) \Rightarrow AH = (m+1)^2$.

Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Rightarrow 2R \cdot AH = AB \cdot AC.$$

Lại có $R = 1$ và $\overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{m+1};0) \Rightarrow BC = 2\sqrt{m+1}$. Do đó

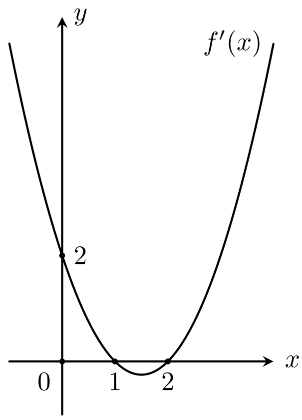
$$2(m+1)^2 = m+1+(m+1)^4 \Leftrightarrow (m+1)^3+1 = 2(m+1).$$

$$\Leftrightarrow \quad m^3+3m^2+m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & \text{(thỏa mãn)} \\ m = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} & \text{(thỏa mãn)} \\ m = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}. & \text{(không thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $\left(\dfrac{-1}{2};+\infty\right)$. **B** $\left(\dfrac{-3}{2};+\infty\right)$. **C** $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. **D** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Đặt $y = g(x) = f(x-x^2) \Rightarrow g'(x) = f'(x-x^2)\cdot(x-x^2)' = (1-2x)f'(x-x^2)$, khi đó

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x = 0 \\ f'(x-x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x = 0 \\ x-x^2 = 1 \\ x-x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Với $x < \dfrac{1}{2}$ thì $\begin{cases} 1-2x > 0 \\ f'\left[-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right] > 0 \end{cases}$ nên $g'(x) > 0$.

Với $x > \dfrac{1}{2}$ thì $\begin{cases} 1 - 2x < 0 \\ f'\left[-\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\right] > 0 \end{cases}$ nên $g'(x) < 0$ hay hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ có đồ thị (C). Từ một điểm bất kì trên đường thẳng nào dưới đây luôn kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đến đồ thị (C).

A $x = -1$. B $x = 0$. C $x = 2$. D $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3$.

Lấy bất kì $A(a; 0)$. Đường thẳng đi qua A có hệ số góc k có phương trình $y = k(x - a)$ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi phương trình

$$\begin{aligned} & k(x-a) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow (3x^2 - 6x + 3)(x - a) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^3 - 3(1+a)x^2 + 6ax - 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[2x^2 - (1-a)x + 3a - 1\right] = 0 \end{aligned}$$

có một nghiệm. Đặt $g(x) = 2x^2 - (1-a)x + 3a - 1$, ta thấy phương trình trên có một nghiệm khi và chỉ khi $g(x)$ có nghiệm kép $x = 1$, tức là $\begin{cases} \Delta = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$. Vậy $A(1; 0)$, từ đó đường thẳng $x = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Phương trình $2^{\sin^2 x} + 2^{1+\cos^2 x} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

A $4 \le m \le 3\sqrt{2}$. B $3\sqrt{2} \le m \le 5$. C $0 < m \le 5$. D $4 \le m \le 5$.

Lời giải.

Ta có

$$2^{\sin^2 x} + 2^{1+\cos^2 x} = m \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 2^{2-\sin^2 x} = m \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + \frac{4}{2^{\sin^2 x}} = m.$$

Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$, với $t \in [1; 2]$, ta có phương trình $t + \dfrac{4}{t} = m$. (1)

Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{4}{t}$, với $t \in [1; 2]$. Ta có

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 2 & \text{(không thỏa mãn)} \\ t = -2. & \text{(không thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

Suy ra $f(t)$ chỉ đồng biến hoặc nghịch biến trên $[1; 2]$. Lại có $f(1) = 5$, $f(2) = 4$. Do đó $\min\limits_{t \in [1;2]} f(t) = 4$ và $\max\limits_{t \in [1;2]} f(t) = 5$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $t \in [1; 2]$, điều này tương đương với

$$\min_{t\in\ [1;2]} f(t) \le m \le \max_{t\in\ [1;2]} f(t) \Leftrightarrow 4 \le m \le 5.$$

Vậy $4 \le m \le 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x+m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là

A 2020. B 2017. C 2019. D 2018.

Lời giải.

Đặt $\log_6(2018x+m) = \log_4(1009x) = t$, suy ra

$$\begin{cases} 2018x + m = 6^t \\ 1009x = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2\cdot 4^t + m = 6^t \Rightarrow m = -2\cdot 4^t + 6^t.$$

Đặt $f(t) = -2\cdot 4^t + 6^t$, ta có $f'(t) = 6^t \ln 6 - 2\cdot 4^t \cdot \ln 4$. Ta cũng có

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{2\ln 4}{\ln 6} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \log_6 16 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}\left(\log_6 16\right).$$

Ta có bảng biến thiên

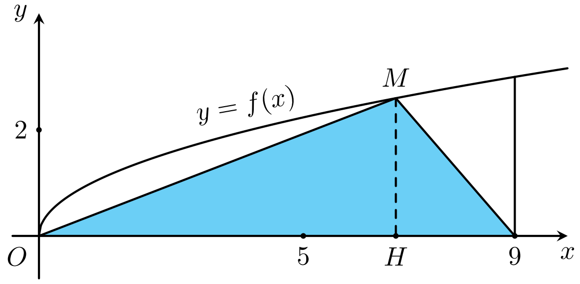
t	$-\infty$		$\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(t) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \ge f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right) \approx -2,01$.

Mà $\begin{cases} m < 2018 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên ta có $\begin{cases} -2 \le m \le 2017 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Vậy có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho đồ thị $(C)\colon y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), đường thẳng $x = 9$ và trục Ox. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox, V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox. Biết rằng $V_1 = 2V_2$, tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM.



A $S = 3$. **B** $S = \dfrac{27\sqrt{3}}{16}$. **C** $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D** $S = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_1 = \pi \displaystyle\int_0^9 \left(\sqrt{x}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \dfrac{81\pi}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên trục Ox, đặt $OH = m$, $0 < m \leq 9$, ta có $M(m; \sqrt{m})$, $MH = \sqrt{m}$ và $AH = 9 - m$.

Suy ra
$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot MH^2 \cdot OH + \frac{1}{3}\pi \cdot MH^2 \cdot AH = \frac{1}{3}\pi MH^2 \cdot OA = 3m\pi.$$

Theo giả thiết ta có $V_1 = 2V_2$ nên $\dfrac{81\pi}{2} = 6m\pi$, suy ra $m = \dfrac{27}{4}$. Do đó $M\left(\dfrac{27}{4}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. Từ đó ta có phương trình đường thẳng OM là $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}x$.

Diện tích S phần hình phẳng giới hạn bở đồ thị (C) và đường thẳng OM là
$$S = \int_0^{\frac{27}{4}} \left(\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{3}}{9}x\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{9}x^2\right)\Bigg|_0^{\frac{27}{1}} = \frac{27\sqrt{3}}{16}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 4$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(5; 9)$. **B** $(3; 6)$. **C** $(\sqrt{2}; 5)$. **D** $(1; 4)$.

Lời giải.

Đặt $x = \tan t$, suy ra $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = (1 + \tan^2 t)\,\mathrm{d}t$. Với $x = 0$ thì $t = 0$, $x = 1$ thì $t = \dfrac{\pi}{4}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t\cdot f(\tan t)}{\tan^2 t+1}\left(\tan^2 t+1\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\cdot f(\tan t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)\cdot f(\tan t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 6$. Đặt $x=\tan t$, suy ra $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Đổi cận $t=0$ thì $x=0$, $t=\dfrac{\pi}{4}$ thì $x=1$. Khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 6.$$

Chọn đáp án A □

Câu 45. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|(2+i)\cdot|z|\cdot z-(1-2i)z| = |1+3i|$ và $|z_1-z_2|=1$. Tính $M=|2z_1+3z_2|$.

(A) $M=19$. (B) $M=25$. (C) $M=5$. **(D)** $M=\sqrt{19}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}&|(2|z|-1)+(|z|+2)i|\cdot|z| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[(2|z|-1)^2+(|z|+2)^2\right]\cdot|z|^2 = 10\\ &\Leftrightarrow 5|z|^4+5|z|^2-10=0 \Leftrightarrow |z|=1, \text{vì } |z|\geq 0.\end{aligned}$$

Gọi $z_1=x_1+y_1i$ và $z_2=x_2+y_2i$, ta có $|z_1|=|z_2|=1$ nên $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=1$. Mặt khác $|z_1-z_2|=1$ nên $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$. Suy ra $x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{1}{2}$. Khi đó

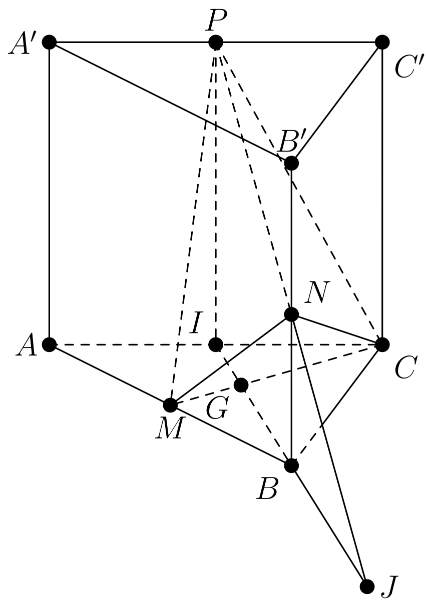
$$\begin{aligned}M=|2z_1+3z_2| &= \sqrt{(2x_1+3x_2)^2+(2y_1+3y_2)^2}\\ &= \sqrt{4(x_1^2+y_1^2)+9(y_1^2+y_2^2)+12(x_1x_2+y_1y_2)} = \sqrt{19}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, A'C', BB'$. Thể tích của khối tứ diện $CMNP$ bằng

(A) $\dfrac{5}{24}V$. (B) $\dfrac{1}{4}V$. (C) $\dfrac{7}{24}V$. (D) $\dfrac{1}{3}V$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm AC, $NP \cap BI = J$.
Ta có $BN \parallel PI$ và $BN = \frac{1}{2}PI$, suy ra BN là đường trung bình của $\triangle PIJ$, suy ra B là trung điểm IJ.
Lại có $CM \cap BI = G$ là trọng tâm tam giác ABC.
Ta có $\frac{S_{JCM}}{S_{BCM}} = \frac{JG}{BG}$ mà $JG = BJ + BG = BI + \frac{2}{3}BI = \frac{5}{3}BI$, suy ra

$$\frac{S_{JCM}}{S_{BCM}} = \frac{\frac{5}{3}BI}{\frac{2}{3}BI} = \frac{5}{2} \Rightarrow S_{JCM} = \frac{5}{2}S_{BCM} \Rightarrow S_{JCM} = \frac{5}{4}S_{ABC}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{N.MJC} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{JMC} = \frac{5}{12}V; \\ V_2 &= V_{P.MJC} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{JMC} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{5}{8}S_{ABC} = \frac{5}{24}V. \\ \Rightarrow & V_{N.CMP} = V_1 - V_2 = \frac{5}{24}V. \end{aligned}$$

Vậy $V_{N.CMP} = \frac{5}{24}V$.
Chọn đáp án A □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$, $\Delta_2\colon \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 - t. \end{cases}$
Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Tính bán kính mặt cầu (S).

A $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **B** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **C** $\frac{3}{2}$. **D** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2, với $A \in \Delta_1$, $B \in \Delta_2$.

Ta có $A \in \Delta_1$ nên $A(1; 2+t; -t)$, $B \in \Delta_2$ nên $B(4+t'; 3-2t'; 1-t')$, khi đó $\overrightarrow{AB} = (3+t'; 1-2t'-t; 1-t'+t)$.

véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt là $\overrightarrow{u_1} = (0; 1; -1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1; -2; -1)$. Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2t' - t - (1 - t' + t) = 0 \\ 3 + t' - 2(1 - 2t' - t) - (1 - t' + t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t' - 2t = 0 \\ 6t' + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = 0.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (3; 1; 1)$ hay $AB = \sqrt{11}$.

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có đường kính bằng độ dài đoạn AB nên có bán kính $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 4)$, $B(0; 0; 1)$ và mặt cầu $(S) : (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Mặt phẳng $(P) : ax + by + cz + 3 = 0$ đi qua A, B và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

A $T = \dfrac{-3}{4}$. **B** $T = \dfrac{33}{5}$. **C** $T = \dfrac{27}{4}$. **D** $T = \dfrac{31}{5}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) tâm $I(-1; 1; 0)$ và bán kính $R = 2$. Đường thẳng AB đi qua điểm B, có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{BA} = (1; 2; 3)$ có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Ta có $\overrightarrow{IB} = (1; -1; 1)$ suy ra $IB = \sqrt{3} < R$ nên (P) luôn cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Ta thấy (C) có bán kính nhỏ nhất khi và chỉ khi $\mathrm{d}\,(I, (P))$ lớn nhất.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và AB, ta có

$$\mathrm{d}\,(I, (P)) = IH \leq IK.$$

Do đó $\mathrm{d}\,(I, (P))$ lớn nhất khi và chỉ khi H trùng K, hay mặt phẳng (P) vuông góc với IK.

Sau đây ta sẽ tìm điểm K. Vì $K \in AB$ nên $K(t; 2t; 1+3t)$ suy ra $\overrightarrow{IK} = (t+1; 2t-1; 3t+1)$.

Ta có

$$IK \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{7} \Rightarrow \overrightarrow{IK} = \left(\frac{6}{7}; -\frac{9}{7}; \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{7}(6; -9; 4).$$

Mặt phẳng (P) đi qua $B(0; 0; 1)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (6; -9; 4)$ có phương trình:

$$6 \cdot (x - 0) - 9 \cdot (y - 0) + 4 \cdot (z - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-9}{2}x + \frac{27}{4}y - 3z + 3 = 0.$$

Vậy $T = -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A $\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

B $\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{2}$.

C $\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{2}$.

D $\dfrac{x+3}{-26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Lời giải.

Gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P). Khi đó phương trình mặt phẳng (Q) là $x-2y+2z+1=0$.

Gọi H là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (Q), khi đó đường thẳng BH đi qua $B(1;-1;3)$ và nhận $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;2)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình tham số là $\begin{cases} x+1+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \end{cases}$.

Vì $H=BH\cap(Q)$ nên $H\in BH$, từ đó $H(1+t;-1-2t;3+2t)$ và $H\in(Q)$ nên ta có

$$(1+t)-2(1-2t)+2(3+2t)+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{-10}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right).$$

Khi đó ta có $\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{-2}{9}\right)=\dfrac{1}{9}\cdot(26;11;-2)$.

Gọi K là hình chiếu của B lên đường thẳng d, khi đó ta có $\mathrm{d}(B,d)=BK\geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi $BK=BH$, do đó đường thẳng d đi qua A có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(26;22;-2)$ có phương trình chính tắc

$$\frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC\perp(ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B. Biết $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SC=2a\sqrt{6}$. Tính sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

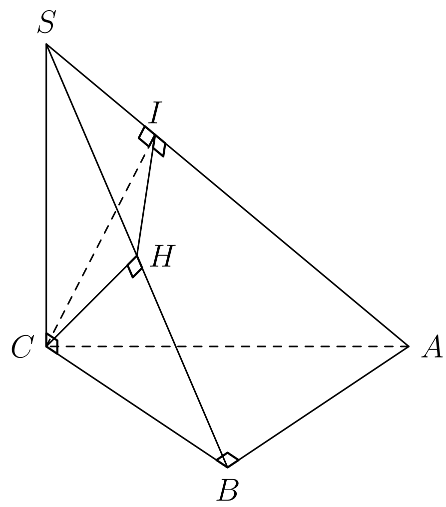
A $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

B $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

C 1.

D $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAC) từ C kẻ $CI \perp SA$, trong mặt phẳng (SAB) từ I kẻ $IH \perp SA$, cắt SB tại H, với cách vẽ này $SA \perp (CIH)$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SAC) là $\widehat{CIH}$.
Với cách dựng trên ta cũng suy ra $CH \perp SA$.
Ta có $AB \perp SC$, $AB \perp BC$, do đó $AB \perp (SBC)$, suy ra $AB \perp CH$. Lại có $CH \perp SA$ nên $CH \perp (SAB)$, suy ra $CH \perp SB$ và $CH \perp HI$ hay tam giác $\triangle CHI$ vuông tại H.
Xét tam giác vuông SAC ta có

$$CI = \frac{SC \cdot CA}{\sqrt{SC^2 + CA^2}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

Xét tam giác vuông SBC ta có

$$CH = \frac{SC \cdot CB}{\sqrt{SC^2 + CB^2}} = \frac{SC \cdot \sqrt{CA^2 - AB^2}}{\sqrt{SC^2 + CA^2 - AB^2}} = \frac{2a\sqrt{78}}{13}.$$

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SAC) là $\widehat{CIH}$ nên $\sin \widehat{CIH} = \frac{CH}{CI} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.
Chọn đáp án B □