GV NGUYỄN KHẮC HƯỞNG

ĐỀ SỐ 058

(*Đề thi có 6 trang*)

ĐỀ ÔN TẬP THI THPT QUỐC GIA 2018

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút.

(Đề kiểm tra kiến thức toán 12, 2017 - 2018 trường THPT Chuyên KHTN, Hà Nội)

Mã đề thi 058

Họ và tên thí sinh:.................................

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_5 = 2$ và $u_9 = 6$. Tìm giá trị của u_{21}.

A. 18. **B.** 54. **C.** 162. **D.** 486.

Câu 2. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Câu 3. Một hình chóp có tất cả 2018 mặt. Hỏi hình chóp đó có bao nhiêu đỉnh?

A. 1009. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** 1008.

Câu 4. Nếu tăng bán kính đáy của hình nón lên 4 lần và giảm chiều cao của hình nón đi 8 lần, thì thể tích khối nón tăng hay giảm bao nhiêu lần?

A. Tăng 2 lần. **B.** Tăng 16 lần. **C.** Giảm 16 lần. **D.** Giảm 2 lần.

Câu 5. Phương trình $4\sin^2 2x - 3\sin 2x\cos 2x - \cos^2 2x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;\pi)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tâm đối xứng là điểm $I(1;-2)$?

A. $y = \dfrac{2x-3}{2x+4}$. **B.** $y = 2x^3 - 6x^2 + x + 1$.

C. $y = -2x^3 + 6x^2 + x - 1$. **D.** $y = \dfrac{2-2x}{1-x}$.

Câu 7. Cho hai số phức $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = 4 - i$. Tính mô-đun của số phức $z_1^2 + \overline{z}_2$.

A. 12. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 15.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-4;-5)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) là

A. $(1;-4;5)$. **B.** $(-1;4;5)$. **C.** $(1;4;5)$. **D.** $(1;4;-5)$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Tính $f'''(1)$.

A. 3. **B.** -3. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 0.

Câu 10. Cho hai số thực dương a và b, với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_{\sqrt{a}}(ab) = \log_a \sqrt{ab}$. **B.** $\log_{\sqrt{a}}(ab) = \log_a(ab)$.

C. $\log_{\sqrt{a}}(ab) = 2 + 2\log_a b$. **D.** $\log_{\sqrt{a}}(ab) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b$.

Câu 11. Một hình trụ có diện tích toàn phần là $10\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Chiều cao của hình trụ đó là

A. $3a$. **B.** $4a$. **C.** $2a$. **D.** $6a$.

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}}(3x+1)$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{5}{9};1\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right)$.

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x + \cos x$ là

A. $-\cos 2x + \sin x + C$. **B.** $\cos^2 x - \sin x + C$. **C.** $\sin^2 x + \sin x + C$. **D.** $\cos 2x - \sin x + C$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 3z = 4$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Thể tích tứ diện $OABC$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{32}{9}$. **D.** $\frac{16}{9}$.

Câu 15. Một hộp chứa 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Người ta lấy ngẫu nhiên một thẻ từ hộp đó. Tính xác suất để thẻ lấy được mang số lẻ và không chia hết cho 3.

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{3}{10}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{15}$.

Câu 16. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x-1}$ trên đoạn $[-4;-1]$ bằng

A. -5. **B.** $-\frac{11}{2}$. **C.** $-\frac{29}{5}$. **D.** -9.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;-1)$ và $B(-5;4;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

A. $4x - y + z + 7 = 0$. **B.** $4x + y - z + 1 = 0$. **C.** $4x - y - z + 7 = 0$. **D.** $4x + y + z - 1 = 0$.

Câu 18. Biết rằng hai đường cong $y = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 20x + 5$ và $y = x^3 - 2x^2 - 3x - 1$ tiếp xúc nhau tại một điểm duy nhất. Tọa độ điểm đó là

A. $(2;-7)$. **B.** $(1;-5)$. **C.** $(3;-1)$. **D.** $(0;5)$.

Câu 19. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 20. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0) = 2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6 - \frac{15}{\mathrm{e}}$. **B.** $4 - \frac{10}{\mathrm{e}}$. **C.** $\frac{15}{\mathrm{e}} - 4$. **D.** $\frac{10}{\mathrm{e}}$.

Câu 21. Số $20172018^{20162017}$ có bao nhiêu chữ số.

A. 147278481. **B.** 147278480. **C.** 147347190. **D.** 147347191.

Câu 22. Bảng biến thiên ở hình dưới là của hàm số nào dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y=\dfrac{1}{2}x^4-x^2-3$. **B.** $y=2x^4-4x^2-3$. **C.** $y=2|x|^3-3|x|-3$. **D.** $y=2\left|x^3\right|-3x^2-3$.

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $|2z-3-4i|=10$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M-m$ bằng

A. 5. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 20.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Biết $AB=a$, $BC=2a$ và $SC=3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $2a^3$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{4}{3}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}a^3$.

Câu 25. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2-6x+12$ và các tiếp tuyến tại các điểm $A(1;7)$ và $B(-1;19)$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 2.

Câu 26. Gọi M và m là nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\dfrac{(|2x+1|-x-2)\left(1-\log_3(x+4)\right)}{5^{x^2}-5^{|x|}}\geq 0$. Khi đó tích giá trị $M\cdot m$ bằng

A. 6. **B.** -24. **C.** 3. **D.** -12.

Câu 27. Trên một chiếc đài Radio FM có vạch chia để người dùng có thể dò sóng cần tìm. Vạch ngoài cùng bên trái và vạch ngoài cùng bên phải trương ứng là $88\,Mhz$ và $108\,Mhz$. Hai vạch này cách nhau 10 cm. Biết vị trí của vạch ngoài cùng bên trái d (cm) có tần số bằng $k\cdot a^d$ (Mhz) với k và a là hai hằng số. Tìm vị trí tốt nhất của sóng VOV_1 với tần số $102{,}7\,MHz$.

A. Cách vạch ngoài cùng bên phải 1,98 cm. **B.** Cách vạch ngoài cùng bên phải 2,46 cm.

C. Cách vạch ngoài cùng bên trái 7,35 cm. **D.** Cách vạch ngoài cùng bên trái 8,23 cm.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC. Cho SA hợp với đáy một góc $30°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $2y-2z+1=0$. **B.** $2y-2z-1=0$. **C.** $2x-2z+1=0$. **D.** $2x-2z-1=0$.

Câu 30. Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn $C_{2n}^{0} + \dfrac{C_{2n}^{2}}{3} + \dfrac{C_{2n}^{4}}{5} + \dfrac{C_{2n}^{6}}{7} + \cdots + \dfrac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \dfrac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \dfrac{8192}{15}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $6 < n < 9$. **B.** $9 < n < 12$. **C.** $n < 6$. **D.** Không tồn tại n.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$. Tính $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $1 - \dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2} - 1$. **C.** $1 + \dfrac{\pi}{4}$. **D.** $2 - \dfrac{\pi}{2}$.

Câu 32. Cho khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa đường chéo của mặt bên và đáy của lăng trụ là 60°. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đó.

A. $\dfrac{13}{3}\pi a^2$. **B.** $\dfrac{5}{3}\pi a^2$. **C.** $\dfrac{13}{9}\pi a^2$. **D.** $\dfrac{5}{9}\pi a^2$.

Câu 33. Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$. Mặt phẳng đi qua trọng tâm các tam giác SAB, SAC, SAD chia khối chóp này thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 $(V_1 < V_2)$. Tính tỉ lệ $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{8}{27}$. **B.** $\dfrac{16}{81}$. **C.** $\dfrac{8}{19}$. **D.** $\dfrac{16}{75}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = x^2\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)\left(x^2-16\right)$. Hỏi phương trình $f'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 35. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cách cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Câu 36. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và BB'.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Với giá trị nào của tham số m, phương trình $f(|x| + m) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 38. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-i|+|z+i|=6$. Gọi S là đường cong tạo bởi tất cả các điểm biểu diễn số phức $(z-i)(i+1)$ khi z thay đổi. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong S.

A. 12π. **B.** $12\sqrt{2}\pi$. **C.** $9\sqrt{2}\pi$. **D.** 9π.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+10y-2z-6=0$. Cho m là số thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $y=m$ và $x+z-3=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S). Tích tất cả các giá trị của m có thể nhận được bằng

A. -11. **B.** -10. **C.** -5. **D.** -8.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)\cdot[f(x)]^{2018}=x\cdot e^x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Hỏi phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{e}$ có bao nhiêu nghiệm

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018;2018]$ sao cho bất phương trình sau đúng với mọi $x\in(1;100)$: $(10x)^{m+\frac{\log x}{10}}\geq 10^{\frac{11}{10}\log x}$?

A. 2018. **B.** 4026. **C.** 2013. **D.** 4036.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM\cdot ON=12$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 43. Một người viết ngẫu nhiên một số có bốn chữ số. Tính xác suất để các chữ số của số đó được viết ra có thứ tự tăng dần hoặc giảm dần (nghĩa là nếu số được viết dưới dạng $\overline{abcd}$ thì $a<b<c<d$ hoặc $a>b>c>d$).

A. $\dfrac{7}{125}$. **B.** $\dfrac{7}{375}$. **C.** $\dfrac{7}{250}$. **D.** $\dfrac{14}{375}$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{nếu} \quad \cos x\geq 0\\ 1+\cos x & \text{nếu} \quad \cos x<0\end{cases}$. Hỏi hàm số f có bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0;2018)$?

A. 2018. **B.** 1009. **C.** 542. **D.** 321.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $M(5;3;1)$, $N(4;1;2)$ và mặt phẳng $(P): y+z=27$. Biết rằng tồn tại điểm B trên tia AM, điểm C trên (P) và điểm D trên tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Tọa độ điểm C là

A. $(-15;21;6)$. **B.** $(21;21;6)$. **C.** $(-15;7;20)$. **D.** $(21;19;8)$.

Câu 46. Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau d và Δ, vuông góc với nhau và nhận $AB=a$ làm đoạn vuông góc chung $A\in d$, $B\in\Delta$. Trên d lấy điểm M, trên Δ lấy điểm N sao cho $AM=2a$, $BN=4a$. Gọi I là tâm mặt cầu ngoài tiếp tứ diện $ABMN$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BI là

A. $\dfrac{4a}{\sqrt{17}}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{4a}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$, $(Q): x-2y+2z-8=0$, $(R): x-2y+2z+4=0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AB+\dfrac{96}{AC^2}$ là

A. $\dfrac{41}{3}$. **B.** 99. **C.** 18. **D.** 24.

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{1-3x}{3-x}$ có đồ thị (C). Điểm M nằm trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng gấp hai lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của (C). Khoảng cách từ M đến tâm đối xứng của (C) bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong khoảng $(0;6\pi)$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x}\,dx=\frac{1}{2}$?

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 50. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $4x^2+y^2+9z^2=4x+12z+11$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=4x+2y+3z$.

A. $6+2\sqrt{15}$. **B.** 20. **C.** $8+4\sqrt{3}$. **D.** 16.

— HẾT —

Đáp án và lời giải chi tiết

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 C	**6** B	**11** B	**16** A	**21** A	**26** A	**31** D	**36** C	**41** A	**46** A
2 D	**7** C	**12** B	**17** C	**22** D	**27** B	**32** A	**37** A	**42** A	**47** C
3 B	**8** D	**13** C	**18** B	**23** A	**28** D	**33** C	**38** B	**43** D	**48** B
4 A	**9** A	**14** D	**19** D	**24** C	**29** A	**34** A	**39** A	**44** D	**49** A
5 D	**10** C	**15** C	**20** C	**25** B	**30** D	**35** B	**40** D	**45** B	**50** D

LỜI GIẢI CHI TIẾT CÁC CÂU

Câu 1. Giả sử q là công bội và u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số nhân thỏa mãn bài toán. Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}\ \forall n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$. Do giả thiết ta có

$$\begin{cases} u_5 = 2 \\ u_9 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 = 2 \\ u_1 \cdot q^8 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 = 2 \\ 2q^4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 = 2 \\ q^4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{3} \\ q^2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Mà $u_{21} = u_1 \cdot q^{20} = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{10} = 2 \cdot 3^4 = 162$.
Chọn đáp án C

Câu 2. Đặt $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}$, khi đó $f(3) = 0$. Dễ thấy hàm số có đạo hàm trên $[-1;+\infty)$ nên tồn tại $f'(3)$. Do đó

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3}$$

Mà $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}$ suy ra $f'(3) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$
Chọn đáp án D

Câu 3. Do hình chóp có số mặt bằng số đỉnh nên số đỉnh của hình chóp là 2018.
Chọn đáp án B

Câu 4. Gọi V là thể tích của hình nón, h là chiều cao và R là bán kính đường tròn đáy. Khi đó $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi R^2 h$. Gọi V_1 là thể tích hình nón khi thay đổi theo yêu cầu bài toán.
Suy ra $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi (4R)^2 \dfrac{h}{8} = \dfrac{2}{3} \cdot \pi R^2 h = 2V$.
Chọn đáp án A

Câu 5. Ta có

$$\begin{aligned}
&4\sin^2 2x-3\sin 2x\cos 2x-\cos^2 2x=0\\
\Leftrightarrow\,&4\sin^2 2x-4\sin 2x\cos 2x+\sin 2x\cos 2x-\cos^2 2x=0\\
\Leftrightarrow\,&4\sin 2x(\sin 2x-\cos 2x)+\cos 2x(\sin 2x-\cos 2x)=0\\
\Leftrightarrow\,&(\sin 2x-\cos 2x)(4\sin 2x+\cos 2x)=0\\
\Leftrightarrow\,&\left[\begin{array}{l}\sin 2x-\cos 2x=0\\4\sin 2x+\cos 2x=0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Khi $\sin 2x-\cos 2x=0$, dễ thấy $\cos 2x=0$ không là nghiệm nên

$$\sin 2x-\cos 2x=0\Leftrightarrow \sin 2x=\cos 2x\Leftrightarrow \tan 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Do $x\in(0;\pi)$ suy ra $k=0$; $k=1$.

- Khi $4\sin 2x+\cos 2x=0$, dễ thấy $\cos 2x=0$ không là nghiệm nên

$$\begin{aligned}
&4\sin 2x+\cos 2x=0\Leftrightarrow 4\sin 2x=-\cos 2x\\
\Leftrightarrow\,&\tan 2x=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2x=\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)+k\pi\\
\Leftrightarrow\,&x=\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Do $x\in(0;\pi)$ suy ra $k=0$; $k=1$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

Chọn đáp án D

Câu 6. Xét hàm số $y=2x^3-6x^2+x+1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=6x^2-12x$ và $y''=12x-12$. Nên $y''=0\Leftrightarrow 12x-12=0\Leftrightarrow x=1$.

Khi $x=1$ suy ra $y=-2$. Do đó đồ thị hàm số $y=2x^3-6x^2+x+1$ nhận điểm $(1;-2)$ là điểm uốn. Nên điểm I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=2x^3-6x^2+x+1$.

Chọn đáp án B

Câu 7. Ta có số phức $w=z_1^2+\overline{z}_2=(3-i)^2+(4+i)=9-6i+i^2+4+i=12-5i$.

Nên $|w|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$.

Chọn đáp án C

Câu 8. Dễ thấy phương trình mặt phẳng $(Oxz): y=0$ nên suy ra điểm đối xứng với $A(1;-4;-5)$ qua (Oxz) là điểm $A'(1;4;-5)$.

Chọn đáp án D

Câu 9. Tập xác định $\mathscr{D}=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$; $f''(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$ và $f'''(x)=\dfrac{3}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^3}}$ nên $f'''(1)=3$.

Chọn đáp án A

Câu 10. Do $\log_{\sqrt{a}}(ab) = \log_{a^{\frac{1}{2}}}(ab) = 2\log_a(ab) = 2\left(\log_a a + \log_a b\right) = 2 + 2\log_a b$.

Chọn đáp án C

Câu 11. Gọi h là chiều cao của hình trụ, R là bán kính đáy hình trụ, S_{tp} là diện tích toàn phần của hình trụ. Khi đó $S_{\text{tp}} = 2\pi R\cdot h + 2\pi R^2 = 2\pi a\cdot h + 2\pi a^2$. Do giả thiết suy ra

$$2\pi a\cdot h + 2\pi a^2 = 10\pi a^2 \Leftrightarrow 2\pi a\cdot h = 8\pi a^2 \Leftrightarrow h = 4a.$$

Chọn đáp án B

Câu 12. Ta có

$$\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}}(3x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-5>0 \\ 9x-5<3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{5}{9} \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{9}<x<1.$$

Chọn đáp án B

Câu 13. Do $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int(\sin 2x + \cos x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \sin x + C = \sin^2 x + \sin x + C - \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C

Câu 14. Do giả thiết suy ra tọa độ điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-4;0)$ và $C\left(0;0;-\dfrac{4}{3}\right)$ nên $OA = 2$; $OB = 4$ và $OC = \dfrac{4}{3}$. Gọi V là thể tích tứ diện $OABC$ ta có $V = \dfrac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC = \dfrac{1}{6}\cdot 2\cdot 4\cdot\dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{9}$.

Chọn đáp án D

Câu 15. Gọi A là biến cố chọn được thẻ mang số lẻ và không chia hết cho 3. Do giả thiết hộp sẽ chứa 15 thẻ mang số lẻ cụ thể là $1,3,5,\ldots,29$. Dễ thấy số thẻ mang số lẻ chia hết cho 3 là $3,9,15,21,27$. Nên số thẻ không chia hết cho 3 gồm 10 thẻ. Vậy $P(A) = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C

Câu 16. Xét hàm số $y = x + \dfrac{9}{x-1}$ trên đoạn $[-4;-1]$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{9}{(x-1)^2}$.

Xét $y' = 0$ suy ra $(x-1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Khi đó $\max\limits_{x\in[-4;-1]} y = \max\{y(-4), y(-2), y(-1)\} = \max\left\{-\dfrac{29}{5} - 5, -\dfrac{11}{2}\right\} = -5$.

Chọn đáp án A

Câu 17. Gọi I là trung điểm của AB suy ra tọa độ $I(-1;3;0)$ và $\overrightarrow{AB} = (8;-2;-2)$. Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn AB ta chọn $\vec{n}(4;-1;-1)$. Khi đó phương trình mặt phẳng trung trực là

$$4\cdot(x+1) + (-1)\cdot(y-3) + (-1)\cdot(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x - y - z + 7 = 0$$

Chọn đáp án C

Câu 18. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4-6x^3+15x^2-20x+5=x^3-2x^2-3x-1 \\ 4x^3-18x^2+30x-20=3x^2-4x-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4-7x^3+17x^2-17x+6=0 \\ 4x^3-21x^2+34x-17=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=0 \\ (x-1)\left(4x^2-17x+17\right)=0 \end{cases}$$

Suy ra nghiệm của hệ $x=1$ nên tọa độ điểm tiếp xúc là $(1;-5)$.

Chọn đáp án B

Câu 19. Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

Khi đó ta có $\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{x^2-9}}=\lim\limits_{x\to3^+}\sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}=0$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}}}=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}}}=1$.

Vậy đồ thị hàm số có phương trình tiệm cận đứng là $x=-3$ và hai tiệm cận ngang là $y=1$, $y=-1$.

Chọn đáp án D

Câu 20. Xét $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x}$ suy ra $t^3=x$ nên $3t^2\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ khi đó $I=\displaystyle\int 3t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Theo công thức tích phân từng phần

$$I=3t^2\mathrm{e}^t-3\int 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=3t^2\mathrm{e}^t-3\left(2t\mathrm{e}^t-\int 2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)=3t^2\mathrm{e}^t-3\left(2t\mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^t\right)+C$$

Suy ra $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3\sqrt[3]{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}-3\left(2\sqrt[3]{x}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}-2\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right)+C$

hay $F(x)=3\sqrt[3]{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}-3\left(2\sqrt[3]{x}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}-2\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right)+C$.

Do $F(0)=2$ suy ra $6+C=2\Leftrightarrow C=-4$. Khi đó $F(-1)=\dfrac{3}{\mathrm{e}}-3\left(-\dfrac{2}{\mathrm{e}}-\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)-4=\dfrac{15}{\mathrm{e}}-4$.

Chọn đáp án C

Câu 21. Số tự nhiên N có k chữ số khi $10^{k-1}\le N\le 10^k$. Đặt $N=20172018^{20162017}$ suy ra

$$\log N=\log\left(20172018^{20162017}\right)\Leftrightarrow N=10^{\log\left(20172018^{20162017}\right)}$$
$$\Leftrightarrow N=10^{[20162017\cdot\log 20172018]}\simeq 10^{1147278480{,}5}<10^{147278481}.$$

Suy ra số các chữ số là 147278481.

Chọn đáp án A

Câu 22. Xét hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 3$ ta có $y' = 6x^2 - 6x$.

Khi đó $y' = 0$ suy ra $6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Dễ dàng suy ra hàm số có các điểm cực trị $(0;-3)$ và $(1;-4)$.

Mà $y = 2\left|x^3\right| - 3x^2 - 3 \Leftrightarrow y = 2|x|^3 - 3|x|^2 - 3$. Nên dựa vào phép biến đổi đồ thị suy ra hàm số $y = 2\left|x^3\right| - 3x^2 - 3$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

Chọn đáp án D

Câu 23. Giả sử số phức $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Khi đó

$$|2z - 3 - 4i| = 10 \Leftrightarrow |2(x + yi) - 3 - 4i| = 10 \Leftrightarrow |(2x - 3) + (2y - 4)i| = 10$$

suy ra

$$(2x - 3)^2 + (2y - 4)^2 = 100 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

Do đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{3}{2};2\right)$ và bán kính $R = 5$.

Mà $|z| = OM$, ở đó O là gốc tọa độ. Do $OI = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}$ suy ra O nằm trong đường tròn (C). Do đó $\max|z| = OI + IM = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$ và $\min|z| = IM - OI = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

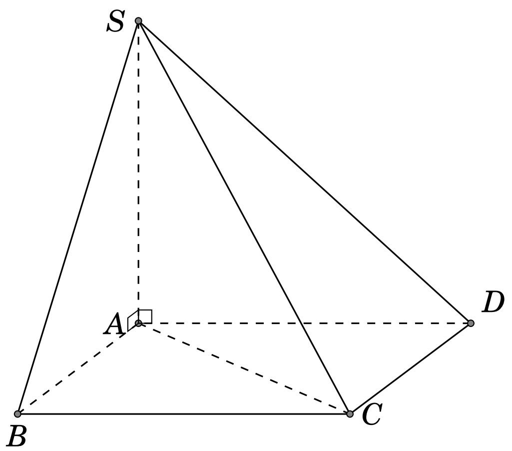
Vậy $M - m = \frac{15}{2} - \frac{5}{2} = 5$.

Chọn đáp án A

Câu 24.

Gọi V là thể tích của hình chóp $S.ABCD$, vì $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AC$.

Trong tam giác vuông SAC ta có



$$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2}$$
$$\Leftrightarrow SA = \sqrt{SC^2 - AB^2 - BC^2}$$
$$\Leftrightarrow SA = \sqrt{9a^2 - 4a^2 - a^2} = 2a$$

Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot a \cdot 2a = \frac{4a^3}{3}$.

Chọn đáp án C

Câu 25.

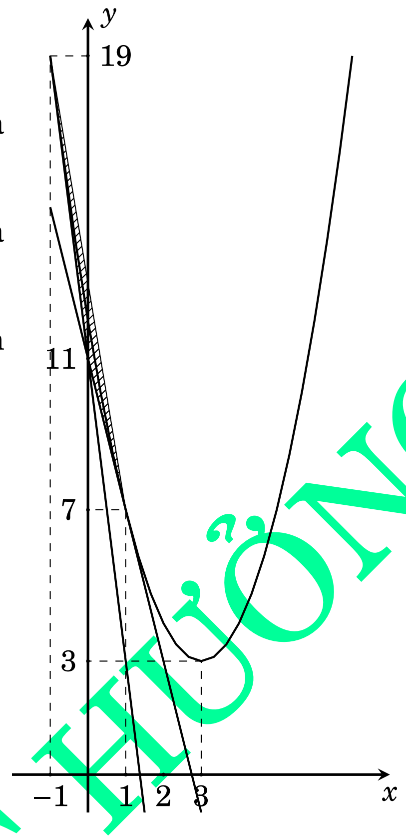
Xét hàm số $y = x^2 - 6x + 12$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 2x - 6$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm A là $y - 7 = y'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = -4x + 11$.

Tương tự phương trình tiếp tuyến tại điểm B là $y - 19 = y'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = -8x + 11$.

Hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị là phần gạch chéo hình bên. Do đó diện tích là



$$S = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 6x + 12 + 8x - 11\right) \mathrm{d}x + $$

$$+ \int_{0}^{1} \left(x^2 - 6x + 12 + 4x - 11\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x^2 + 2x + 1\right) \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left(x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)^3 \Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{3}(x-1)^3 \Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án B

Câu 26. Điều kiện xác định $\begin{cases} 5^{x^2} - 5^{|x|} \neq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$ $(*)$.

Với điều kiện $(*)$, ta xét phương trình

$$|2x+1| - x - 2 = 0 \Leftrightarrow |2x+1| = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = x + 2 \\ 2x + 1 = -x - 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Tương tự xét phương trình

$$1 - \log_3(x+4) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+4) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 3 \Leftrightarrow x = -1.$$

và

$$
\begin{aligned}
5^{x^2}-5^{|x|}=0 &\Leftrightarrow 5^{x^2}=5^{|x|} \Leftrightarrow x^2=|x| \\
&\Leftrightarrow x^4=x^2 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-1\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Ta có bảng xét dấu

x	-4		-1		0		1		$+\infty$
$\vert 2x+1\vert-x-2$		$+$	0	$-$		$-$		$+$	
$1-\log_3(x+4)$		$+$		$-$	0	$-$		$-$	
$5^{x^2}-5^{\vert x\vert}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
VT		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra nghiệm của bất phương trình là $-4<x<-1$. Do đó nghiệm nguyên lớn nhất là -2 và bé nhất là -3. Do đó $M\cdot m=(-2)\cdot(-3)=6$.

Chọn đáp án (A)

Câu 27. Tại vị trí ngoài cùng bên trái $d=0$ sauy ra $k=88$.

Tại vị trí ngoài cùng bên phải $d=10$ suy ra $108=k\cdot a^{10} \Leftrightarrow a=\sqrt[10]{\dfrac{108}{88}}$.

Để thỏa mãn bài toán suy ra $102,7=88\cdot\left(\sqrt[10]{\dfrac{108}{88}}\right)^d \Leftrightarrow d\simeq 7,54$.

Suy ra cách vạch ngoài cùng bên phải là $10-7,54=2,46$.

Chọn đáp án (B)

Câu 28.

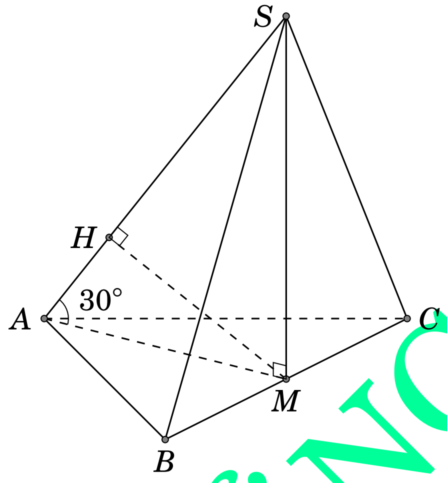
Gọi M là trung điểm của BC. Do tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$. Khi đó $\begin{cases} SM \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMS)$.

Trong mặt phẳng (SAM) kẻ $MH \perp SA$. Theo chứng minh trên ta có $BC \perp MH$. Do đó $\mathrm{d}(SA, BC) = HM$.

Vì $SM \perp (ABC)$ nên $(\widehat{SA,(ABC)}) = (\widehat{SA,AM}) = \widehat{SAM}$. Do giả thiết suy ra $\widehat{SAM} = 30°$.

Xét tam giác vuông AMH ta có

$MH = AM \cdot \sin\widehat{HAM} = AM \cdot \sin 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án D

Câu 29. Giả sử phương trình mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Gọi $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của d_1, d_2, ta chọn $\vec{v}_1(-1;1;1)$ và $\vec{v}_2(-2;1;1)$.

Ta có $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = (0;-1;1)$ khi đó ta chọn $\vec{n}(0;-1;1)$

Trên d_1, d_2 lần lượt chọn các điểm $A(2;0;0)$ và $B(0;1;2)$, gọi I là trung điểm của AB ta có $I\left(1;\dfrac{1}{2};1\right)$.

Do giả thiết suy ra mặt phẳng (P) đi qua I với véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$, ta có phương trình

$(-1)\cdot\left(y - \dfrac{1}{2}\right) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow -y + z + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y - 2z + 1 = 0.$

Chọn đáp án A

Câu 30. Ta có $(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 x + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n} \quad (1)$

và

$(1-x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 - \mathrm{C}_{2n}^1 x + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 - \cdots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2\left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-2} x^{2n-2} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}\right) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} \quad (*)$$

Lấy tích phân hai vế của $(*)$ ta có

$$2\int_0^1 \left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-2} x^{2n-2} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}\right] \mathrm{d}x \quad (**)$$

Mà

$$\begin{aligned}
&2\int_0^1 \left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-2} x^{2n-2} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}\right) \mathrm{d}x \\
=&2\left(\mathrm{C}_{2n}^0 x + \mathrm{C}_{2n}^2 \frac{x^3}{3} + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-2} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^1 \\
=&2\left(\mathrm{C}_{2n}^0 + \frac{\mathrm{C}_{2n}^2}{3} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^4}{5} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^6}{7} + \cdots + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

Mặt khác
$$\int_0^1 \left[(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}-\frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_0^1=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}.$$
Từ $(**)$ ta suy ra
$$2\left(\mathrm{C}_{2n}^0+\frac{\mathrm{C}_{2n}^2}{3}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^4}{5}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^6}{7}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}\right)=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{C}_{2n}^0+\frac{\mathrm{C}_{2n}^2}{3}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^4}{5}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^6}{7}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}=\frac{2^{2n}}{2n+1}.$$
Do đó $\frac{2^{2n}}{2n+1}=\frac{8192}{15}\Leftrightarrow\frac{2^{2n}}{2n+1}=\frac{2^{13}}{15}\Leftrightarrow 15\cdot 2^{2n-13}=2n+1.$

- Nếu $n\geq 7$ suy ra $15\cdot 2^{2n-13}$ là một số chẵn và $2n+1$ là một số lẻ. Do đó không có giá trị thỏa mãn.

- Nếu $n\leq 6$ suy ra $15\cdot 2^{2n-13}$ là một số hữu tỉ dạng $\frac{p}{q}$ với $(p,q)=1$ và $2n+1$ là một số lẻ. Dó đó không có giá trị nào thỏa mãn.

Chọn đáp án D

Câu 31. Đặt $x=-t$ suy ra $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=\frac{\pi}{4}$ suy ra $t=-\frac{\pi}{4}$; khi $x=-\frac{\pi}{4}$ suy ra $t=\frac{\pi}{4}$.

Đặt $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ suy ra $I=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} f(-t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-t)\,\mathrm{d}t.$

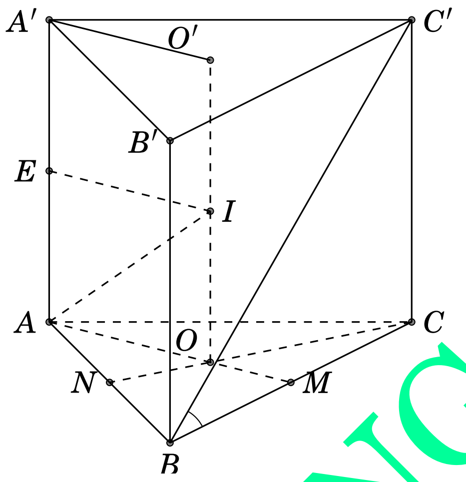
Do giá trị tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân nên $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-x)\,\mathrm{d}x.$

Do giả thiết ta có
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[3f(-x)-2f(x)]\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=(\tan x-x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2-\frac{\pi}{2}$$
Từ chứng minh trên suy ra $3I-2I=2-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow I=2-\frac{\pi}{2}.$

Chọn đáp án D

Câu 32.

Giả sử khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Do giả thiết $CC' \perp (ABC)$ và $(\widehat{C'B,(ABC)}) = (\widehat{C'B,BC}) = \widehat{C'BC}$. Do giả thiết suy ra $\widehat{C'BC} = 60°$.



Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $A'B'C'$. Gọi E là trung điểm của AA', trong mặt phẳng $(AA'O'O)$ dựng đường thẳng Δ qua E và vuông góc với AA'. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ suy ra $\{I\} = OO' \cap \Delta$. Gọi R là tâm mặt cầu lăng trụ suy ra $R = IA$.

Khi đó $R = \sqrt{OA^2 + IO^2}$.

Mà $OA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông BCC' ta có $CC' = BC\tan\widehat{C'BC} = a\tan 60° = a\sqrt{3}$. Do đó $IO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $R = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\dfrac{13}{12}}$. Gọi S là diện tích mặt cầu nên $S = 4\pi R^2 = \dfrac{13a^2}{3}\pi$.

Chọn đáp án A

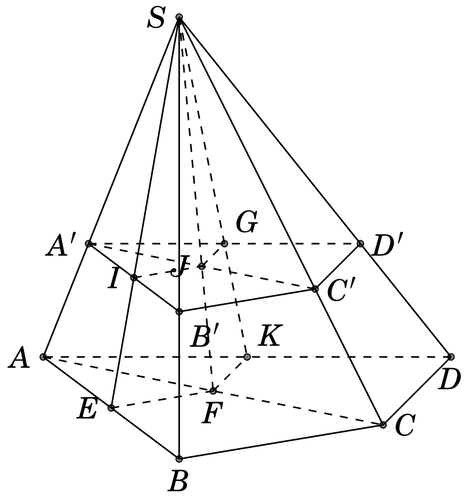
Câu 33.

Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AB, AC và AD. Gọi I, J, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAC, SAD.

Do giả thiết ta có $\dfrac{SI}{SE} = \dfrac{SJ}{SF} = \dfrac{SG}{SK} = \dfrac{2}{3}$. Suy ra

$\begin{cases} IJ \parallel EF \\ JG \parallel FK \end{cases} \Rightarrow (IJG) \parallel (EFG)$

hay $(IJG) \parallel (ABCD)$. Do đó (IJG) cắt mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến d đi qua I và song song với AB.



Gọi $\{A'\} = d \cap SA$, $\{B'\} = d \cap SB$, $\{C'\} = A'J \cap SC$, $\{D'\} = A'G \cap SD$. Thiết diện của mặt phẳng (IJG) với hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $A'B'C'D'$.

Do $A'B' \parallel AB$, theo định lý Ta-lét ta có $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SI}{SE} = \dfrac{2}{3}$.

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{2}{3}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{8}{27}$ suy ra $V_{S.A'B'C'} = \dfrac{8}{27}V_{S.ABC}$.

Mà $V_{S.ABC} = V_{S.A'B'C'} + V_{A'B'C'.ABC}$ suy ra $V_{A'B'C'.ABC} = V_{S.ABC} - \dfrac{8}{27}V_{S.ABC} = \dfrac{19}{27}V_{S.ABC}$.

Do đó $V_{S.A'B'C'} = \dfrac{8}{19}V_{A'B'C'.ABC}$ (1).

Chứng minh tương tự $V_{S.A'C'D'} = \dfrac{8}{19}V_{A'C'D'.ACD}$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$V_{S.A'B'C'}+V_{S.A'C'D'}=\frac{8}{19}V_{A'B'C'.ABC}+\frac{8}{19}V_{A'C'D'.ACD}$$
$$\Leftrightarrow V_{S.A'B'C'D'}=\frac{8}{19}V_{A'B'C'D'.ABCD}$$

Do giả thiết suy ra V_1 là thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ và V_2 là thể tích khối đa diện $A'B'C'D'.ABCD$. Do đó $\frac{V_1}{V_2}=\frac{8}{19}$.

Chọn đáp án C

Câu 34. Xét $f(x)=0\Leftrightarrow x^2\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)\left(x^2-16\right)=0 \quad (*)$.

Suy ra phương trình $(*)$ có tập nghiệm là $S=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

Xét dấu $f(x)$ ta có

x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		0		1		2		3		4		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số có 9 cực trị. Do đó phương trình $f'(x)=0$ có 9 nghiệm.

Chọn đáp án A

Câu 35.

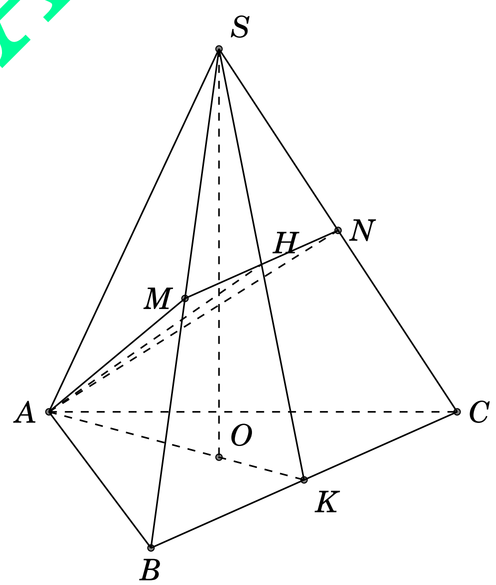
Gọi K là trung điểm của BC và H là giao điểm của SK và MN. Giả sử O là trọng tâm của tam giác ABC do giả thiết suy ra $SO\perp(ABC)$.

Ta có $MN\parallel BC$ và $\frac{SM}{SB}=\frac{SH}{SK}=\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}$.

Vì $KB=KC$ nên ta chứng minh được $HM=HN$.

Mặt khác ta dễ chứng minh được $AM=AN$ nên tam giác AMN cân đỉnh A. Vì $(MAN)\cap(SBC)=MN$, $(MAN)\perp(SBC)$, $AH\perp MN$ nên $AH\perp(SBC)$ suy ra $AH\perp SK$.

Theo chứng minh trên ta có $SH=HK$ nên tam giác SAK cân đỉnh A suy ra $SA=AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Trong tam giác vuông SBK ta có $SK^2=SB^2-BK^2$. Mà $SA=SB$ và $BK=\frac{BC}{2}$. Nên $SK^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{2a^2}{4}\Leftrightarrow SK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $SH=HK=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tương tự $AH=\sqrt{SA^2-SH^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Mà $S_{\Delta MAN}=\frac{1}{2}AH\cdot MN=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

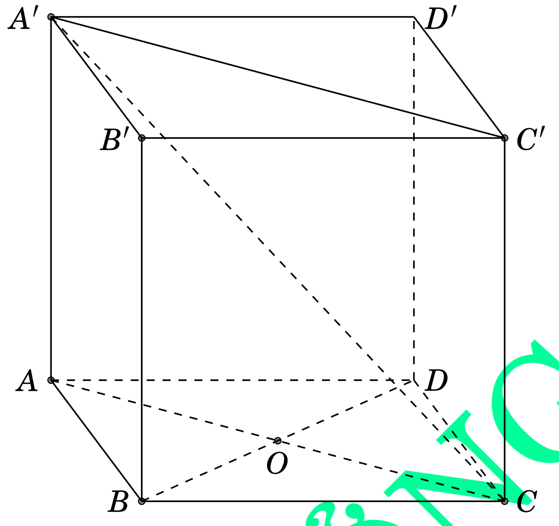
Chọn đáp án B

Câu 36.

Do giả thiết suy ra $BB' \parallel (AA'C'C)$.

Do đó

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(BB', A'C) &= \mathrm{d}(BB', (AA'C'C)) \\ &= \mathrm{d}(B, (AA'C'C)) \end{aligned}$$



Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên $AA' \perp BD$. Do $ABCD$ là hình thoi, ta suy ra $BD \perp AC$. Khi đó $BD \perp (AA'C'C)$. Giả sử $\{O\} = AC \cap BD$ suy ra $\mathrm{d}(B, (AA'C'C)) = OB$.

Vì $\widehat{ABC} = 120^\circ$ suy ra $\widehat{BAD} = 60^\circ$ do đó tam giác ABD là tam giác đều. Ta có $BD = a$ nên $OB = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 37.

Từ bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

- Nếu $m > 0$ thì từ đồ thị $y = f(|x|)$ tịnh tiến sang trái m đơn vị được đồ thị $y = f(|x| + m)$.
- Nếu $m < 0$ thì từ đồ thị $y = f(|x|)$ tịnh tiến sang phải $|m|$ đơn vị được đồ thị $y = f(|x| + m)$.

Do đó phương trình $f(|x| + m) = 0$ có nhiều nhất 4 nghiệm.

Chọn đáp án (A)

Câu 38. Giả sử điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = (z - i)(i + 1)$.

Khi đó $(z - i)(i + 1) = x + yi$ nên

$$\begin{cases} z - i = \dfrac{x + yi}{1 + i} \\ z + i = \dfrac{x + yi}{1 + i} + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - i = \dfrac{(x + yi)(1 - i)}{2} \\ z + i = \dfrac{(x - 2) + (y + 2)i}{1 + i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - i = \dfrac{(x + yi)(1 - i)}{2} \\ z + i = \dfrac{[(x - 2) + (y + 2)i](1 - i)}{2} \end{cases}.$$

Ta suy ra $|z - i| = |x + yi| \cdot \left|\dfrac{1 - i}{2}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2 + y^2}$.

Tương tự $|z + i| = |(x - 2) + (y + 2)i| \cdot \left|\dfrac{1 - i}{2}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2}$.

Do giả thiết $|z - i| + |z + i| = 6$ suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2} = 6\sqrt{2}.$$

Giả sử $F_2(0; 0)$ và $F_1(2; -2)$, khi đó $MF_1 + MF_2 = 6\sqrt{2}$. Do đó tập hợp điểm M chuyển động trên elip nhận F_1, F_2 là tiêu điểm và có độ dài trục lớn là $6\sqrt{2}$.

Ta có $a = 3\sqrt{2}$ và $c = \dfrac{F_1F_2}{2} = \sqrt{2}$ nên $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4$. Khi đó $S = \pi ab = 12\sqrt{2}\pi$.

Chọn đáp án (B)

Câu 39. Ta có phương trình mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=36$.

Gọi I, R là tâm và bán kính mặt cầu ta có $I(2;-5;1)$ và $R=6$.

Gọi Δ là đường thẳng là giao của hai mặt phẳng $y=m$ và $x+z-3=0$.

Mà $x+z-3=0 \Leftrightarrow z=3-x$. Đặt $x=t$ ta suy ra phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=t \\ y=m \\ z=3-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của Δ, ta chọn $\vec{u}(1;0;-1)$ và điểm $M_0(0;m;3)$ thuộc Δ.

Để Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) khi $\mathrm{d}(I,\Delta)=R$. Mà $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{IM_0}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.

Ta có $\overrightarrow{IM_0}(-2;m+5;2)$ nên $\left[\vec{u};\overrightarrow{IM_0}\right]=(m+5;0;m+5)$ suy ra $\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{IM_0}\right]\right|=\sqrt{2(m+5)^2}$.

Do đó $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{\sqrt{2(m+5)^2}}{\sqrt{2}}=|m+5|$. Để thỏa mãn bài toán thì

$|m+5|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+5=6 \\ m+5=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-11. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A

Câu 40. Do giả thiết ta có $\displaystyle\int f'(x)\cdot[f(x)]^{2018}\,\mathrm{d}x=\int x\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad (*)$.

Theo công thức tích phân từng phần

$\displaystyle\int x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\cdot\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C.$

Từ $(*)$ ta suy ra $\dfrac{1}{2019}[f(x)]^{2019}=x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$. Do $f(1)=1$ suy ra $C=\dfrac{1}{2019}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{1}{2019}[f(x)]^{2019}&=x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+\frac{1}{2019}\\ &\Leftrightarrow [f(x)]^{2019}=2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1\\ &\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[2019]{2019(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)+1}\end{aligned}$$

Xét phương trình

$$\begin{aligned}f(x)=-\frac{1}{\mathrm{e}}&\Leftrightarrow \sqrt[2019]{2019(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)+1}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\\ &\Leftrightarrow 2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1=\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{2019}\\ &\Leftrightarrow 2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2019}}=0 \quad (**)\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x)=2019(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)+1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2019}}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=2019(x\cdot\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)=2019x\cdot\mathrm{e}^x$

Xét $g'(x)=0$ suy ra $2019x\cdot\mathrm{e}^x=0\Leftrightarrow x=0$.

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2019}}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$1+\dfrac{1}{e^{2019}}$	$\searrow$	$-2018+\dfrac{1}{e^{2019}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $(**)$ có hai nghiệm.

Chọn đáp án D

Câu 41. Xét với $x\in(1;100)$, ta có

$$(10x)^{m+\frac{\log x}{10}}\geq 10^{\frac{11}{10}\log x}\Leftrightarrow \log(10x)^{m+\frac{\log x}{10}}\geq \log 10^{\frac{11}{10}\log x}$$
$$\Leftrightarrow\left(m+\frac{\log x}{10}\right)(1+\log x)\geq\frac{11}{10}\log x\quad(1)$$

Đặt $t=\log x$, để $1<x<100\Leftrightarrow 0<\log x<2$ suy ra điều kiện $0<t<2$. Khi đó (1) trở thành

$$\left(m+\frac{t}{10}\right)(1+t)\geq\frac{11}{10}t\quad(2)$$

Để (1) đúng với mọi $x\in(1;100)$ khi (2) đúng với mọi $t\in(0,2)$.

Xét $t\in(0,2)$ suy ra $t+1>0$, khi đó

$$(2)\Leftrightarrow(10m+t)(1+t)\geq 11t\Leftrightarrow 10m+t\geq\frac{11t}{1+t}\Leftrightarrow m\geq\frac{10t-t^2}{10(t+1)}$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{10t-t^2}{10(t+1)}$ trên khoảng $(0,2)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{10-2t-t^2}{10(t+1)^2}=\dfrac{11-(1+t)^2}{10(t+1)^2}$

Dễ thấy $f'(t)>0\ \forall t\in(0,2)$ suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0,2)$ mà $f(0)=0$; $f(2)=\dfrac{8}{15}$.

Để thỏa mãn bài toán khi $m\geq f(2)\Leftrightarrow m\geq\dfrac{8}{15}$. Do đó số giá trị nguyên của m trong đoạn $[-2018;2018]$ là 2018.

Chọn đáp án A

Câu 42. Do giả thiết phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

Giả sử điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và $N(x_1;y_1;z_1)$ thỏa mãn bài toán.

Mà $OM\cdot ON=12\Leftrightarrow OM=\dfrac{12}{ON}\Leftrightarrow OM=\dfrac{12}{ON^2}\cdot ON$.

Vì N thuộc tia OM nên hai véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ cùng chiều suy ra $\overrightarrow{OM}=\dfrac{12}{ON^2}\overrightarrow{ON}\quad(*)$.

Mà $\overrightarrow{OM}(x_0;y_0;z_0)$; $\overrightarrow{ON}(x_1;y_1;z_1)$ và $ON^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$.

Từ $(*)$ suy ra $\begin{cases} x_0 = \dfrac{12x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \\ y_0 = \dfrac{12y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \\ z_0 = \dfrac{12z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \end{cases}$. Vì M thuộc phương trình mặt phẳng (ABC) nên

$$\begin{aligned} 6x_0+3y_0+2z_0-12=0 &\Leftrightarrow 6\frac{12x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+3\frac{12y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+2\frac{12z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}-12=0 \\ &\Leftrightarrow 6x_1+3y_1+2z_1 = x_1^2+y_1^2+z_1^2 \\ &\Leftrightarrow (x_1-3)^2+\left(y_1-\frac{3}{2}\right)^2+(z_1-1)^2=\frac{49}{4} \end{aligned}$$

Do đó tập hợp điểm N thuộc mặt cầu (S): $(x-3)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=\dfrac{49}{4}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ta có $R=\dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án A

Câu 43. Giả sử số có dạng $\overline{abcd}$. Gọi A là biến cố thỏa mãn bài toán. Do giả thiết suy ra a, b, c, d khác nhau và mỗi tập con gồm 4 chữ số khác nhau thì có một cách sắp xếp thỏa mãn bài toán.

- Nếu $a<b<c<d$ suy ra $a\neq 0$ nên số cách chọn số thỏa mãn là C_9^4.
- Nếu $a>b>c>d$ số cách chọn số thỏa mãn là C_{10}^4.

Mặt khác số các số gồm 4 chữ số là $9\cdot10\cdot10\cdot10$. Do đó $P(A)=\dfrac{C_9^4+C_{10}^4}{9\cdot10\cdot10\cdot10}=\dfrac{14}{375}$.

Chọn đáp án D

Câu 44. Do các hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Ta xét hàm số $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{nếu } x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right] \\ 1+\cos x & \text{nếu } x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$

Ta xét $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(1+\cos x)=1=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin x=1=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số liên tục tại $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Mặt khác, ta xét $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\sin x=-1=f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}(1+\cos x)=1\neq f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số gián đoạn tại $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to2\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2\pi^-}\sin x=0=f(2\pi)$.

Vậy điểm gián đoạn của hàm số có dạng $x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$.

Để $x\in(0;2018)$ suy ra $0<\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi<2018 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4}<k<\dfrac{1}{2\pi}\left(2018-\dfrac{3\pi}{2}\right)$, vì $k\in\mathbb{Z}$ suy ra $k\in\{0,1,2,\ldots,320\}$.

Chọn đáp án D

Câu 45. Do giả thiết suy ra C là giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{BAD}$ và mặt phẳng (P).

Đặt $\vec{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}$ và $\vec{e}_2 = \dfrac{\overrightarrow{AN}}{\left|\overrightarrow{AN}\right|}$. Mà $\overrightarrow{AM} = (3;4;0)$ suy ra $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

Tương tự ta có $\overrightarrow{AN} = (2;2;1)$ suy ra $\left|\overrightarrow{AN}\right| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$.

Khi đó tọa độ $\vec{e}_1\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};0\right)$ và $\vec{e}_2\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ suy ra $\vec{e}_1+\vec{e}_2 = \left(\dfrac{19}{15};\dfrac{22}{15};\dfrac{1}{3}\right)$. Gọi $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thân giác góc $\widehat{BAD}$, dễ thấy $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{e}_1+\vec{e}_2$, ta chọn $\vec{u}(19;22;5)$.

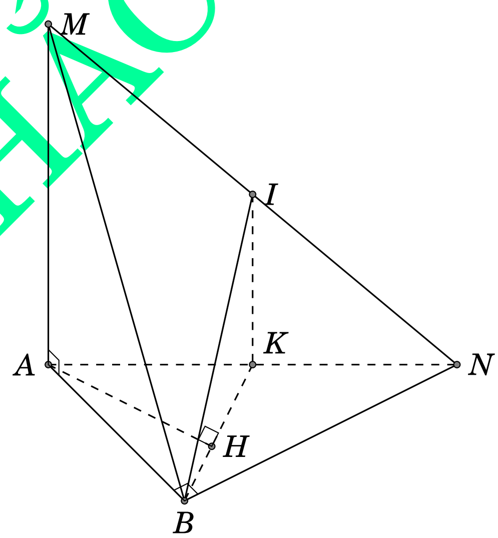
Khi đó phương trình tham số của đường phân giác trong góc $\widehat{BAD}$ là $\begin{cases} x = 2+19t \\ y = -1+22t \\ z = 1+5t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Do giả thiết tọa độ điểm C tương ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình

$-1+22t+1+5t = 27 \Leftrightarrow t = 1$. Ta suy ra tọa độ điểm $C(21;21;6)$.

Chọn đáp án B

Câu 46.



Do giả thiết ta có

$\begin{cases} BN \perp AB \\ BN \perp AM \end{cases} \Rightarrow BN \perp (MAB)$.

Suy ra $BN \perp BM$. Chứng minh tương tự ta có $MA \perp (MAB)$ suy ra $AN \perp AM$.

Do đó hai điểm A, B nhìn MN dưới góc 90° nên A, B, M, N cùng thuộc mặt cầu đường kính MN.

Trong mặt phẳng (MAB) ta kẻ $IK \parallel MA$.

Trong mặt phẳng (NAB) ta kẻ $AH \perp BK$.

Theo chứng minh trên suy ra $IK \perp (ABN)$ nên $IK \perp AH$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp BK \\ AH \perp IK \end{cases} \Rightarrow AH \perp (IKB)$.

Do đó

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(AM, IB) &= \mathrm{d}(AM, (IKB)) \\ &= \mathrm{d}(A, (IKB)) = AH \end{aligned}$$

Xét tam giác vuông ABN ta có $AN = \sqrt{AB^2+BN^2} = \sqrt{a^2+(4a)^2} = \sqrt{17}a$.

Do cách dựng ta có $KA = KN$ nên $BK = \dfrac{AN}{2} = \dfrac{\sqrt{17}a}{2}$.

Ta có $\sin\widehat{BAN} = \dfrac{BN}{AN} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

Mà $S_{\Delta ABK} = \dfrac{1}{2}\cdot AB \cdot AK \cdot \sin\widehat{BAK} = \dfrac{1}{2}\cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{17}a}{2}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

Mặt khác $S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot \frac{\sqrt{17}a}{2}$. Suy ra $AH = \frac{4a}{\sqrt{17}}$.

Vậy khoảng cách giữa AM và BI bằng $\frac{4a}{\sqrt{17}}$.

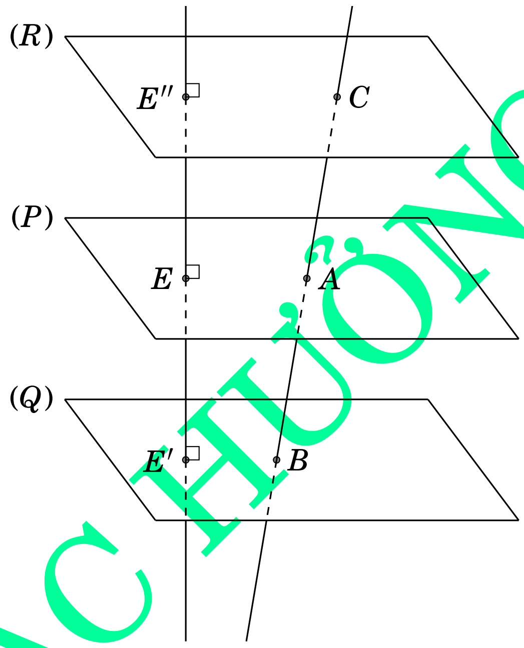
Chọn đáp án (A)

Câu 47.

Dễ thấy các mặt phẳng (P), (Q) và (R) song song với nhau. Do giả thiết suy ra $\mathrm{d}((R),(P)) = EE'' = 1$ và $\mathrm{d}((P),(Q)) = EE' = 3$.

Theo định lý Ta-lét trong không gian ta có $\frac{E''E}{EE'} = \frac{AC}{AB}$ suy ra $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow AB = 3AC$.

Đặt $S = AB + \frac{96}{AC^2}$ suy ra $S = 3AC + \frac{96}{AC^2}$.



Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM -GM

$$S = \frac{3AC}{2} + \frac{3AC}{2} + \frac{96}{AC^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3AC}{2} \cdot \frac{3AC}{2} \cdot \frac{96}{AC^2}} \Leftrightarrow S \geq 18.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{3AC}{2} = \frac{96}{AC^2} \Leftrightarrow AC^3 = 64 \Leftrightarrow AC = 4$.

Vậy $\min S = 18$ khi $AC = 4$.

Chọn đáp án (C)

Câu 48. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Vì $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1-3x}{3-x} = +\infty$ suy ra $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-3x}{3-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 3}{\frac{3}{x} - 1} = 3$ suy ra $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

Giả sử $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị (C) thỏa mãn bài toán. Suy ra $M\left(x_0; \frac{1-3x_0}{3-x_0}\right)$.

Gọi d_1 khoảng cách từ M đến đường thẳng $x = 3$, ta có $d_1 = |x_0 - 3|$.

Tương tự gọi d_2 khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = 3$, ta có $d_2 = |y_0 - 3| = \left|\frac{1-3x_0}{3-x_0} - 3\right| = \left|\frac{8}{3-x_0}\right|$.

Do giả thiết ta có

$$|x_0 - 3| = 2\left|\frac{8}{3-x_0}\right| \Leftrightarrow (x_0-3)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 3 = 4 \\ x_0 - 3 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 7 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$$

- Khi $x_0 = 7$ suy ra $y_0 = 5$.

- Khi $x_0 = -1$ suy ra $y_0 = 1$.

Gọi I là giao điểm hai tiệm cận ta có $I(3;3)$.

- Khi $M(7;5)$ ta có $IM = \sqrt{(7-3)^2+(5-3)^2} = 2\sqrt{5}$.

- Khi $M(-1;1)$ ta có $IM = \sqrt{(-1-3)^2+(1-3)^2} = 2\sqrt{5}$.

Vậy khoảng cách từ M đến giao điểm hai tiệm cận bằng$2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B

Câu 49. Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\int_0^m \frac{5+4\cos x}{5+4\cos x}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\ln|5+4\cos x|\Big|_0^m = -\frac{1}{4}(\ln|5+4\cos m| - \ln 9)\\ &= -\frac{1}{4}\ln\frac{|5+4\cos m|}{9}\end{aligned}$$

Vì $-1 \le \cos m \le 1$,$\forall m$ nên $-4 \le 4\cos m \le 4$, $\forall m$ suy ra $5+4\cos m > 0$, $\forall m$ do đó

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\ln\frac{|5+4\cos m|}{9} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5+4\cos m}{9}\right) = -2\\ &\Leftrightarrow \frac{5+4\cos m}{9} = \mathrm{e}^{-2} \Leftrightarrow \cos m = \frac{9}{\mathrm{e}^2} - 5 \simeq -0{,}945\end{aligned}$$

Dễ thấy trong một chu kì 2π có 2 giá trị m thỏa mãn $\cos m = \dfrac{9}{\mathrm{e}^2} - 5$. Do đó trong khoảng $(0;6\pi)$ sẽ có 6 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A

Câu 50. Ta có

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 = 4x + 12z + 11 \Leftrightarrow (2x-1)^2 + y^2 + (3z-2)^2 = 16$$

Mà $P = 2(2x-1) + 2y + (3z-2) + 4$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có

$$\begin{aligned}&[2(2x-1)+2y+(3z-2)]^2 \le \left(2^2+2^2+1^1\right)\cdot\left[(2x-1)^2+y^2+(3z-2)^2\right]\\ &\Leftrightarrow [2(2x-1)+2y+(3z-2)]^2 \le 144\\ &\Leftrightarrow -12 \le 4x+2y+3z-4 \le 12\\ &\Leftrightarrow -8 \le 4x+2y+3z \le 16\end{aligned}$$

Suy ra $\max P = 16$ khi $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{3z-2}{1}\\ 4x+2y+3z = 16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{11}{6}\\ y = \dfrac{8}{3}\\ z = \dfrac{10}{9}\end{cases}$

Chọn đáp án D