GV NGUYỄN KHẮC HƯỞNG

ĐỀ SỐ 044

(Đề thi có 6 trang)

ĐỀ ÔN TẬP THI THPT QUỐC GIA 2018

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút.

(Đề thi thử toán THPT QG sở GD - ĐT Bắc Giang lần 2)

Mã đề thi 044

Họ và tên thí sinh:...............................

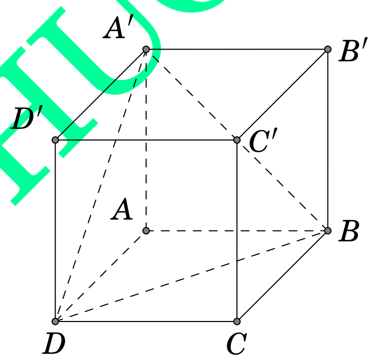
Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là

A. $e^x + C$. **B.** $\frac{e^x}{2} + C$. **C.** $e^{2x} + C$. **D.** $\frac{e^{2x}}{2} + C$.

Câu 2.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ là

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+25}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A. 11. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$; $u_2 = 1$. Giá trị của u_{10} bằng

A. $u_{10} = 31$. **B.** $u_{10} = -23$. **C.** $u_{10} = -20$. **D.** $u_{10} = 15$..

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ có phương trình là

A. $3x-2y+z-12=0$. **B.** $3x-2y+z-8=0$. **C.** $3x+2y+z-12=0$. **D.** $x-2y+3z-8=0$.

Câu 6. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$ bằng

A. 2. **B.** -3. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** $\frac{9}{8}$.

Câu 7. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ bằng

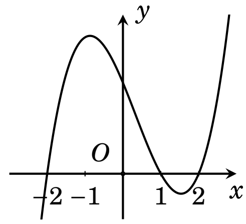
A. $\frac{3}{2}i$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 8. Đồ thị của hàm số nào sau đây có tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{x}{x^2+1}$. **B.** $y = \frac{x^2}{x+1}$. **C.** $y = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$. **D.** $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{1+x}$.

Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị ở hình bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 10. Mô đun của số phức $z = (1+2i)(2-i)$ là

A. $|z| = 5$. **B.** $|z| = \sqrt{5}$. **C.** $|z| = 10$. **D.** $|z| = 6$.

Câu 11. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 8,4%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 năm, người đó lĩnh được số tiền (cả vốn và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong thời gian đó người này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 166.846.000 đồng. **B.** 164.246.000 đồng. **C.** 160.246.000 đồng. **D.** 162.246.000 đồng.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và thỏa mãn $f(-1) = 4$; $f(3) = 7$. Giá trị của $I = \int\limits_{-1}^{3} 5f'(t)\,dt$ bằng

A. $I = 20$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 15$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}(2;1;-3)$, $\vec{b}(2;5;1)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$. **B.** $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12$. **C.** $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$. **D.** $\vec{a}\cdot\vec{b} = 9$.

Câu 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$ là

A. $-\dfrac{13}{3}$. **B.** 1. **C.** -3. **D.** $-\dfrac{7}{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,\ \forall c \in \mathbb{R}$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt$. **D.** $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f(x)=m$ có đúng một nghiệm là

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $[-2;2]$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1$. Mặt cầu S có tâm I là

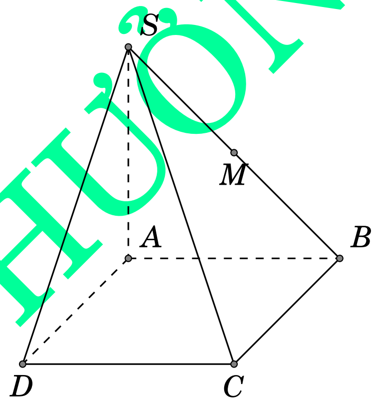
A. $I(1;-2;3)$. **B.** $I(1;2;-3)$. **C.** $I(-1;2;-3)$. **D.** $I(-1;2;3)$.

Câu 18. Phương trình $\log_3(2x+1)=2$ có nghiệm là

A. $x=5$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=4$.

Câu 19.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh SB (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 20. Cho A là tập hợp gồm 20 điểm phân biệt. Số đoạn thẳng có hai đầu mút phân biệt thuộc tập A là

A. 170. **B.** 160. **C.** 190. **D.** 360.

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(2;1)$ và vectơ $\vec{a}(1;3)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}$ biến điểm A thành điểm A'. Tọa độ điểm A' là

A. $A'(-1;-2)$. **B.** $A'(1;2)$. **C.** $A'(4;3)$. **D.** $A'(3;4)$.

Câu 22. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được chọn từ các chữ số: 1;2;3;4;5;6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A. Xác suất để số chọn được là số chia hết cho 5 là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{30}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Câu 23. Hệ số góc k của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y=x^3+1$ tại điểm $M(1;2)$ là

A. $k=12$. **B.** $k=3$. **C.** $k=5$. **D.** $k=4$.

Câu 24. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{3a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25. Tập nghiệm S của bất phương trình $3^{x-1}>27$ là

A. $S=[4;+\infty)$. **B.** $S=(4;+\infty)$. **C.** $S=(0;4)$. **D.** $S=(-\infty;4)$.

Câu 26. Cho $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 12$ giá trị của $\int_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 24. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 14.

Câu 27. Điểm cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ là

A. $x = 3$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = -1$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$ và hai đường thẳng $\Delta\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$, $\Delta'\colon \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A và cắt cả hai đường thẳng Δ, Δ' là

A. $\frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{7}$. **B.** $\frac{x+1}{-6} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{7}$.

C. $\frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{7}$. **D.** $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{7}$.

Câu 29. Phần thực của số phức $z = 1 - 2i$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 30. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^n\mathrm{C}_n^n = 14348907$. Hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^n$, $(x \neq 0)$ bằng

A. -1365. **B.** 32760. **C.** 1365. **D.** -32760.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$ thỏa mãn $(f(0) - f(2)) \cdot (f(3) - f(2)) > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ có hai cực trị.

B. Phương trình $f(x) = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt.

C. Hàm số $f(x)$ không có cực trị.

D. Phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm duy nhất.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và $d'\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$. Phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất là

A. $x - z + 1 = 0$. **B.** $x - 4y + z - 7 = 0$. **C.** $3x - 2y - 2z - 1 = 0$. **D.** $-x + 4y - z - 7 = 0$.

Câu 33. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(P)\colon y = x^2 - 4x + 3$ và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\frac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Giá trị của S bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x - y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tọa độ giao điểm M của (P) và trục $x'Ox$ là

A. $M\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$. **B.** $M\left(-\frac{1}{3};0;0\right)$. **C.** $M(1;0;0)$. **D.** $M\left(\frac{1}{3};0;0\right)$.

Câu 35. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O. Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác có một góc bằng $120°$, thiết diện qua đỉnh S cắt mặt phẳng đáy theo dây cung $AB = 4a$ và là một tam giác vuông. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

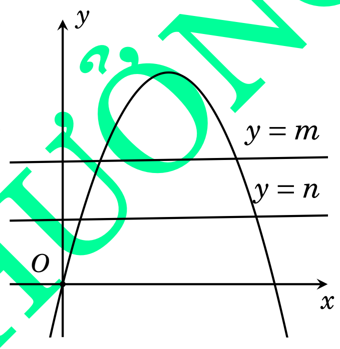
A. $\pi\sqrt{3}a^2$. **B.** $\pi 8\sqrt{3}a^2$. **C.** $\pi 2\sqrt{3}a^2$. **D.** $\pi 4\sqrt{3}a^2$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ có đồ thị là (C) và I là giao của hai tiệm cận của (C). Điểm M di chuyển trên (C). Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn IM bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 37.

Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Giá trị của biểu thức $T = (4-m)^3 + (4-n)^3$ bằng



A. $T = \dfrac{320}{9}$. **B.** $T = \dfrac{75}{2}$. **C.** $T = \dfrac{512}{15}$. **D.** $T = 405$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5} + C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là

A. $\dfrac{x+3}{2\left(x^2+4\right)} + C$. **B.** $\dfrac{x+3}{x^2+4} + C$. **C.** $\dfrac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)} + C$. **D.** $\dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)} + C$.

Câu 39. Biết rằng $\displaystyle\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\,dx = \frac{\pi}{6}$, ở đó a, b là các số nguyên dương và $4 < a + \sqrt{b} < 5$. Tổng $a + b$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| \le 2$ và $|z - \bar{z}| \le 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $T = |z - 2i|$. Tổng $M + m$ bằng

A. $1 + \sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{2} + \sqrt{10}$. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 41. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_5 - 2\log u_2 = 2\left(1 + \sqrt{\log u_5 - 2\log u_2 + 1}\right)$ và $u_n = 3u_{n-1}$, $\forall n \ge 2$. Giá trị lớn nhất của n để $u_n < 7^{100}$ là

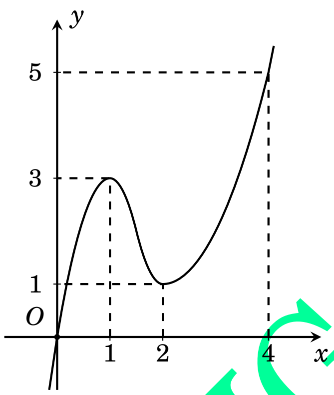
A. 191. **B.** 192. **C.** 176. **D.** 177.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng BC có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u} = (2;1;-1)$. **B.** $\vec{u} = (1;1;0)$. **C.** $\vec{u} = (1;-1;0)$. **D.** $\vec{u} = (1;2;1)$.

Câu 43.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây Đặt $M = \max\limits_{\mathbb{R}} f\left(2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right)$, $m = \min\limits_{\mathbb{R}} f\left(2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right)$. Tổng $M + m$ bằng



A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB cân tại S. Góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy bằng $60°$, góc giữa SA và mặt đáy bằng $45°$. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. Chiều cao của hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1| + |z-3-4i| = 10$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |\overline{z} - 1 + 2i|$ bằng

A. $P_{\min} = \sqrt{17}$. **B.** $P_{\min} = \sqrt{34}$. **C.** $P_{\min} = 2\sqrt{10}$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Câu 46. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy (ABC) bằng $60°$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{5\sqrt{7}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{10\sqrt{7}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Câu 47. Phương trình $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $1 \le m \le \sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2} \le m \le 3$. **D.** $3 \le m \le 4$.

Câu 48. Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nghiên cùng một lúc ba tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

A. 1768. **B.** 1771. **C.** 1350. **D.** 2024.

Câu 49. Số giá trị nguyên của $m \in (-10;10)$ để phương trình $(\sqrt{10}+1)^{x^2} + m(\sqrt{10}-1)^{x^2} = 2 \cdot 3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt là

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 16.

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;2]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên a thuộc $[-4;4]$ sao cho $M \le 2m$?

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

— HẾT —

Đáp án và lời giải chi tiết

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 D	**6** C	**11** D	**16** A	**21** D	**26** A	**31** A	**36** B	**41** B	**46** A
2 C	**7** D	**12** D	**17** C	**22** B	**27** D	**32** B	**37** A	**42** C	**47** C
3 B	**8** A	**13** C	**18** D	**23** B	**28** C	**33** C	**38** C	**43** B	**48** D
4 B	**9** A	**14** C	**19** B	**24** D	**29** C	**34** A	**39** D	**44** A	**49** B
5 A	**10** A	**15** B	**20** C	**25** B	**30** C	**35** D	**40** A	**45** A	**50** A

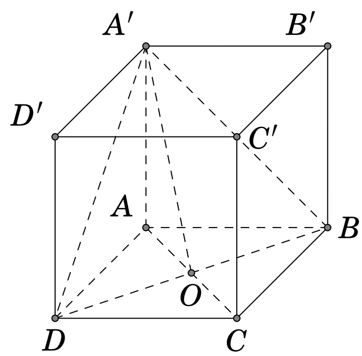
LỜI GIẢI CHI TIẾT CÁC CÂU

Câu 1. Ta có $\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Chọn đáp án D

Câu 2.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow \widehat{A'OA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và mặt phẳng $(ABCD)$.



Ta có $AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle AA'O$ vuông tại A có $A'O = \sqrt{AA'^2 + AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Khi đó $\sin\widehat{A'OA} = \frac{AA'}{A'O} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án C

Câu 3. Điều kiện $x \neq -m$.

Ta có $y' = \frac{m^2 - 25}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 25 < 0 \\ -m \geq 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < m < 5 \\ m \leq -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow -5 < m \leq -1.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án B

Câu 4. Công sai của cấp số cộng là $d = u_2 - u_1 = 1 - 4 = -3$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = u_1 + (n-1)d = -3n + 7$.

Khi đó $u_{10} = -3 \cdot 10 + 7 = -23$.

Chọn đáp án B

Câu 5. Mặt phẳng vuông góc với Δ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \vec{u}_\Delta = (3;-2;1)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng Δ là

$$3(x-3) - 2(y+1) + 1(z-1) = 0 \quad \text{hay} \quad 3x - 2y + z - 12 = 0.$$

Chọn đáp án A

Câu 6. Điều kiện $x > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\log_2 x - 3)(\log_2 x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = -1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do đó tổng hai nghiệm là $8 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{2}$.

Chọn đáp án C

Câu 7. Theo định lí vi-ét ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1 z_2 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Ta có

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{(z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2}{z_1z_2} = \frac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\cdot\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{2}} = -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án D

Câu 8.

- Hàm số $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang.
- Hàm số $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ và $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$ đều có bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu do đó không có tiệm cận ngang.

- Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1+x}$ có điều kiện là $-2\le x\le 2$ do đó không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (A)

Câu 9. Nhìn đồ thị ta thấy hàm số đi xuống trên khoảng $(-1;1)$ do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
Chọn đáp án (A)

Câu 10. Ta có $z=(1+2i)(2-i)=4+3i \Rightarrow |z|=\sqrt{4^2+3^2}=5$.
Chọn đáp án (A)

Câu 11. Số tiền thu được sau n năm theo hình thức lãi kép là $A_n=A_0(1+r)^n$.
Sau 6 năm số tiền thu được là $A_6=100(1+8{,}4\%)^6=162{,}246$ triệu đồng.
Chọn đáp án (D)

Câu 12. Ta có $I=5\displaystyle\int_{-1}^{3} f'(t)\,\mathrm{d}t=5f(t)\Big|_{-1}^{3}=5(f(3)-f(-1))=15$.

Chọn đáp án (D)

Câu 13. Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 2+1\cdot 5+(-3)\cdot 1=6$.
Chọn đáp án (C)

Câu 14. Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$ Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, suy ra $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\end{array}\right.$.
Khi đó $y(-2)=-\dfrac{13}{3}$; $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{2}$; $y(0)=-3\Rightarrow \max\limits_{[-2;\frac{1}{2}]} y=-3$.
Chọn đáp án (C)

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ ta có các mệnh đề sau

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall c\in(a;b)$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Chọn đáp án B

Câu 16. Để phương trình $f(x)=m$ có đúng một nghiệm thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=m$ tại đúng một điểm.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=m$ tại đúng một điểm.

Do đó $m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án A

Câu 17. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-3)$.

Chọn đáp án C

Câu 18. Ta có $\log_3(2x+1)=2\Leftrightarrow 2x+1=3^2\Leftrightarrow x=4$.

Chọn đáp án D

Câu 19.

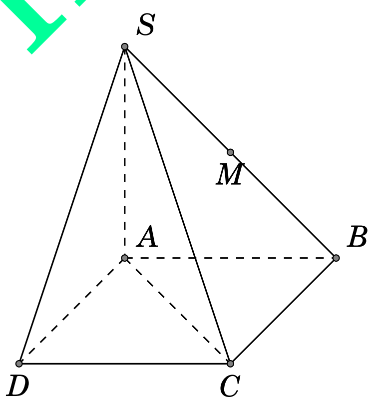
Vì $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{SCA}$ là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có $AC=a\sqrt{3}$.

Xét tam $\triangle SAC$ có $\mathrm{d}(S,(ABCD))=SA=AC\cdot\tan\widehat{SCA}=3a$.

Vì M là trung điểm của SB nên

$$\mathrm{d}(M,(ABCD))=\frac{1}{2}\mathrm{d}(S,(ABCD))=\frac{3a}{2}.$$



Chọn đáp án B

Câu 20. Số các đoạn thẳng có hai đầu mút phân biệt thuộc tập A là số các tổ hợp chập 2 của 20 phần tử là $\mathrm{C}_{20}^2=190$.

Chọn đáp án C

Câu 21. Gọi $A'(x';y')$ khi đó $\begin{cases} x'=2+1=3 \\ y'=1+3=4 \end{cases}\Rightarrow A'(3;4)$.

Chọn đáp án D

Câu 22. Số các phần tử của A là $n(A)=\mathrm{A}_6^4$.

Gọi số tự nhiên lập được là $x=\overline{abcd}$.

Để x chia hết cho 5 thì $d=5\Rightarrow d$ có một cách chọn.

Chọn a, b, c có $\mathrm{A}_5^3\Rightarrow$ có A_5^3 số tự nhiên lập được chia hết cho 5.

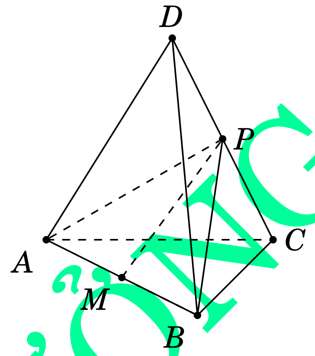
Do đó xác suất để số được chọn chia hết cho 5 là $\mathrm{P}=\dfrac{\mathrm{A}_5^3}{\mathrm{A}_6^4}=\dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án B

Câu 23. Ta có $y' = 3x^2 \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M là $k = y'(1) = 3$.

Chọn đáp án (B)

Câu 24.



Gọi M, P lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Vì $\triangle ADC = \triangle DBC \Rightarrow AP = BP \Rightarrow \triangle APB$ cân tại $P \Rightarrow PM \perp AB$.

Chứng minh tương tự ta có $MP \perp DC$.

Do đó đoạn vuông góc chung của AB và CD là MP.

Ta có $AP = BP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle ABP$ có $PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(AB, CD) = MP = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 25. Ta có $3^{x-1} > 27 \Leftrightarrow x - 1 > 3 \Leftrightarrow x > 4 \Rightarrow S = (4; +\infty)$.

Chọn đáp án (B)

Câu 26. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t = 2\cdot 12 = 24. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

Câu 27. Ta có $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Mà $y'' = 6x \Rightarrow \begin{cases} y''(1) = 6 > 0 \\ y''(-1) = -6 < 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn đáp án (D)

Câu 28. Đường thẳng Δ đi qua $M(1;0;-3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (2;1;-1)$.

Đường thẳng Δ' đi qua $N(0;-1;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta'} = (1;-2;1)$.

Gọi đường thẳng cần tìm là d và gọi M, N lần lượt là giao điểm của d với Δ, Δ'.

Khi đó $\begin{cases} M(1+2m; m; 3-m) \\ N(n; -1-2n; 2+n) \end{cases}$

Ba điểm A, M, N cùng thuộc đường thẳng d nên thẳng hàng do đó $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$.

Mà $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (2m; m+1; 2-m) \\ \overrightarrow{AN} = (n-1; -2n; 1+n) \end{cases}$

Do đó $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$ khi và chỉ khi

$$\frac{2m}{n-1} = \frac{m+1}{-2n} = \frac{2-m}{1+n}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m}{n-1} = \dfrac{m+1}{-2n} \\ \dfrac{2m}{n-1} = \dfrac{2-m}{1+n} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5mn = -m+n-1 \\ 3mn = -m+2n-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10mn = -2m+2n-2 \\ 3mn = -m+2n-2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow -13mn = -m$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{1}{13}. \end{array}\right.$$

TH1. Nếu $m = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (0;1;2)$ do đó d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (0;1;2)$.

TH2. Nếu $n = \frac{1}{13} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \left(-\frac{12}{13}; -\frac{2}{13}; \frac{14}{13}\right)$.
Do đó véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (-6;-1;7)$.
Khi đó phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{7}$.

Chọn đáp án C

Câu 29. Số phức $z = 1 - 2i$ có phần thực là 1.

Chọn đáp án C

Câu 30. Xét khai triển $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + x\mathrm{C}_n^1 + x^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + x^n\mathrm{C}_n^n$.

Thay $x = 2$ ta được $3^n = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^n\mathrm{C}_n^n$.

Vì $\mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^n\mathrm{C}_n^n = 14348907 \Rightarrow 3^n = 14348907 \Leftrightarrow n = \log_3(14348907) = 15$.

Khi đó $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{15} = \sum\limits_{k=0}^{15} \mathrm{C}_{15}^k x^{30-5k}(-1)^k$.

Hệ số x^{10} ứng với $30 - 5k = 10 \Leftrightarrow k = 4$.

Do đó hệ số chứa x^{10} là $\mathrm{C}_{15}^4 \cdot (-1)^4 = 1365$.

Chọn đáp án C

Câu 31. Từ $(f(0) - f(2)) \cdot (f(3) - f(2)) > 0$ ta xét hai trường hợp

TH1. $\begin{cases} f(0)-f(2)>0 \\ f(3)-f(2)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)>f(2) \\ f(3)>f(2). \end{cases}$

Nhìn bảng bên ta thấy hàm số có một cực trị.

x	0		2		3
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$

TH2. $\begin{cases} f(0)-f(2)<0 \\ f(3)-f(2)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)<f(2) \\ f(3)<f(2). \end{cases}$

Nhìn bảng bên ta thấy hàm số có một cực trị.

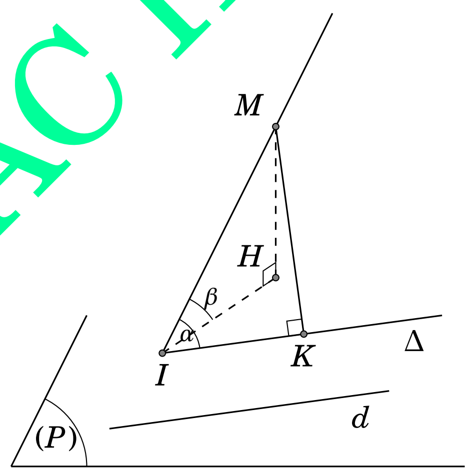
x	0		2		3
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$

Suy ra hàm số $y=f(x)$ chắc chắn có hai cực trị, mặt khác hàm $y=f(x)$ là hàm bậc 3 nên $y=f(x)$ chỉ có nhiều nhất hai cực trị.

Chọn đáp án A

Câu 32.

Ta có d và d' là hai đường thẳng chéo nhau. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất.



Kẻ đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) thỏa mãn Δ song song với d và Δ cắt d'. Khi đó $(d',d)=(d',\Delta)=\alpha$.

Lấy điểm $M \in d'$ và kẻ $MH \perp (P)$ tại H, suy ra $(d',(P))=\widehat{MIH}=\beta$.

Ta có $\begin{cases} \sin\beta = \dfrac{MH}{MI} \\ \sin\alpha = \dfrac{MK}{MI} \end{cases}$ mà $MH \le MK$.

Suy ra $\sin\beta \le \sin\alpha \Rightarrow \beta \le \alpha$.

Vậy góc giữa d' và (P) đạt giá trị lớn nhất bằng góc $\alpha=(d,d')$.

Ta có $\cos(d,d')=\dfrac{\vec{u}_d\cdot\vec{u}_{d'}}{|\vec{u}_d|\cdot|\vec{u}_{d'}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra $\cos(d',(P))=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sin(d',(P))=\sqrt{1-\cos^2(d',(P))}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy mặt phẳng (P) cần thỏa mãn

- (P) chứa $d \Rightarrow (P)$ chứa $N(1;-1;2)$.
- (P) chứa $d \Rightarrow \vec{n}_{(P)}\cdot\vec{u}_d=0$.
- $\sin(d',(P))=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \dfrac{\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{u}_{d'}}{|\vec{n}_{(P)}|\cdot|\vec{u}_{d'}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Dễ thấy chỉ mặt phẳng $x-4y+z-7=0$ thỏa mãn cả ba điều kiện trên.

Chọn đáp án B

Câu 33. Gọi $M(x_0;y_0)\in(P)\Rightarrow y_0=x_0^2-4x_0+3$.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm M là: $d: y=(2x_0-4)(x-x_0)+x_0^2-4x_0+3$.

Vì tiếp tuyến đi qua điểm A nên thay tọa độ điểm A vào d ta được

$$-3=(2x_0-4)(\frac{3}{2}-x_0)+x_0^2-4x_0+3$$

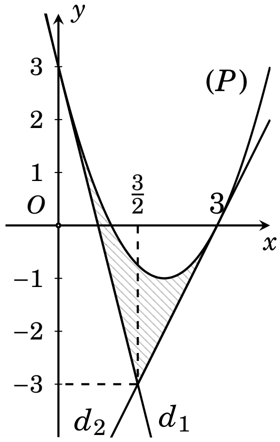
$$\Leftrightarrow\quad x_0^2-3x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\ x+0=3.\end{array}\right.$$

- Với $x_0=0\Rightarrow$ tiếp tuyến $d_1: y=-4x+3$.
- Với $x_0=3\Rightarrow$ tiếp tuyến $d_2: y=2x-6$.

Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 là nghiệm phương trình

$$-4x+3=2x-6\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Vẽ đồ thị (P) và hai đường thẳng d_1; d_2 trên cùng một mặt phẳng tọa độ như hình vẽ.



Khi đó diện tích cần tính là phần được bôi đen bên hình được xác định bởi

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2\\&=\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\left[(x^2-4x+3)-(-4x+3)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}\left[(x^2-4x+3)-(2x-6)\right]\mathrm{d}x\\&=\int\limits_0^{\frac{3}{2}}x^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}(x^2-6x+9)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{3}=\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Câu 34. Gọi (C) là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) và (C) có tâm H, bán kính r.

Bán kính r của đường tròn là nhỏ nhất khi và chỉ khi IH lớn nhất khi và chỉ khi $\mathrm{d}(I,(P))$ lớn nhất.

Vì $M\in x'Ox$ nên gọi $M(m;0;0)$. Suy ra mặt phẳng (P) chứa AM và $(P)\perp(\alpha)$.

Khi đó $\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{MA},\vec{n}_{(\alpha)}\right]=(3;2+m;m-1)$.

Mà mặt phẳng (P) đi qua A nên phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$3(x-0)+(2+m)(y-2)+(m-1)(z-2)=0\quad\text{hay}\quad 3x+(2+m)y+(m-1)z-3m=0.$$

Ta có $d(I;(P))=\dfrac{9}{\sqrt{2m^2+2m+14}}$ lớn nhất khi và chỉ khi $2m^2+2m+14$ nhỏ nhất.

Mà $2m^2+2m+14=2\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{2}\geq\dfrac{27}{2}$.

Do đó $2m^2+2m+14$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $M\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$.

Chọn đáp án A

Câu 35.

Tam giác SAB vuông cân tại S có $AB=4a$

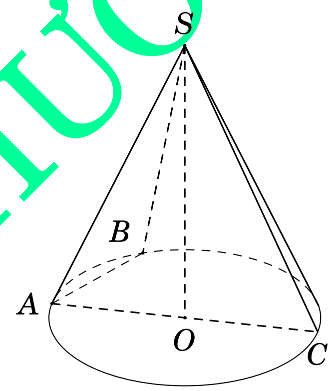
Suy ra $SA=SB=2a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC cân tại S có $\widehat{ASC}=120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{SAC}=\widehat{SCA}=30^\circ$.

$\Rightarrow AO=SA\cdot\cos\widehat{SAO}=a\sqrt{6}$.

Suy ra $S_{xq}=\pi Rl=4\pi a^2\sqrt{3}$.



Chọn đáp án D

Câu 36. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên $I(-1;1)$.

Điểm $M\in(C)\Rightarrow M\left(m;\dfrac{m+2}{m+1}\right)$.

Khi đó

$$IM=\sqrt{(m+1)^2+\frac{1}{(m+1)^2}}\geq\sqrt{2|m+1|\cdot\frac{1}{|m+1|}}=\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow\quad IM\geq\sqrt{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của IM là $\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B

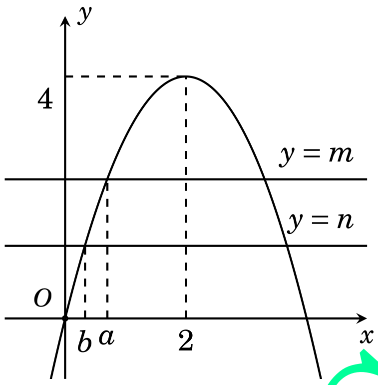
Câu 37.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2+4x$ và trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

Khi đó $S = \int\limits_0^2 (-x^2+4x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{16}{3}$.

Đường thẳng $y=m$ và $y=n$ chia S thành ba phần bằng nhau có diện tích theo thứ tự từ trên xuống là S_1; S_2; S_3.

Gọi hoành độ các giao điểm của parabol với hai đường thẳng như hình bên.



Ta có

$$\begin{aligned}
& S_1 = 2\int\limits_a^2 (-x^2+4x-m)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}S \\
\Leftrightarrow\ & \left.\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-mx\right)\right|_a^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{16}{3} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{16}{3}-2m\right)-\left(-\frac{a^3}{3}+2a^2-ma\right) = \frac{16}{9} \quad (1).
\end{aligned}$$

Mà $x=a$ là nghiệm của phương trình $-x^2+4x=m$ nên ta có $-a^2+4a=m \quad (2)$.

Thay (2) vào (1) ta được $-\dfrac{2a^3}{3}+4a^2-8a+\dfrac{32}{9}=0 \Leftrightarrow a \approx 0{,}613277$.

Suy ra $m = -a^2+4a \approx 2{,}077$.

Tương tự ta có

$$\begin{aligned}
& S_1+S_2 = \frac{2}{3}S \\
\Rightarrow\ & 2\int\limits_b^2 (-x^2+4x-n)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot 2\cdot\int\limits_0^2 (-x^2+4x)\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{2}{3}b^3+4b^2-8b+\frac{16}{9}=0 \\
\Leftrightarrow\ & b \approx 0{,}252839 \Rightarrow n = -b^2+4b = 0{,}947428.
\end{aligned}$$

Khi đó $T=(4-m)^3+(4-n)^3 = \dfrac{320}{9}$.

Chọn đáp án A

Câu 38. Đặt $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = 2\,\mathrm{d}t$.

Khi đó $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int 2f(t)\,\mathrm{d}t$.

Mà $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$ nên $\displaystyle\int 2f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2(t+3)}{t^2+4}+C$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\int f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{t+3}{t^2+4}+C\\
\Leftrightarrow\ &\int f(2t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t+3}{4t^2+4}+C\\
\Leftrightarrow\ &\int f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Câu 39. Ta có $I=\int\limits_4^{a+\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x-3=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận

- $x=a+\sqrt{b}\Rightarrow \sin t=\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}\Rightarrow t=\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)$.
- $x=4\Rightarrow \sin t=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
I&=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t\\
&=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)}1\,\mathrm{d}t\\
&=t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)}\\
&=\arcsin\left(\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right)-\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Vì $I=\frac{\pi}{6}$ nên

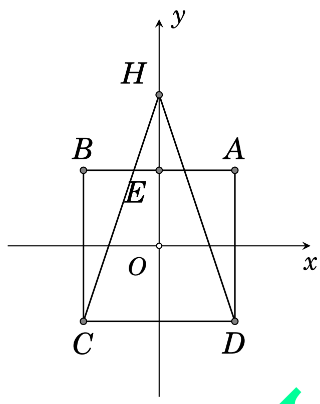
$$\begin{aligned}
&\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)=\frac{\pi}{6}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &a+\sqrt{b}=3+\sqrt{3}\\
\Rightarrow\ &\begin{cases}a=3\\ b=3\end{cases}\Rightarrow a+b=6.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D

Câu 40. Đặt $z=x+yi$ với $x,\ y\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\begin{cases} |z+\bar{z}|\le 2 \\ |z-\bar{z}|\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le 1 \\ |y|\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in[-1;1] \\ y\in[-1;1] \end{cases}$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là điểm $E(x;y)$ nằm trong hình vuông $ABCD$ với $A(1;1)$, $B(-1;1)$, $C(-1;-1)$ và $D(1;-1)$ như hình vẽ.



Khi đó $T=|z-2i|=EH$ với $H(0;2)$.

Dễ thấy EH đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $E(0;1)$ khi đó $m=\min EH=1$.

Tương tự EH đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} E(-1;-1) \\ E(1;-1) \end{array}\right.$.

Khi đó $M=\max EH=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

Vậy $M+m=1+\sqrt{10}$.

Chọn đáp án A

Câu 41. Vì $u_n=3u_{n-1}\Rightarrow(u_n)$ là cấp số nhân có công bội $q=3$.

Suy ra số hạng tổng quát là $u_n=u_1\cdot q^{n-1}$ hay $u_n=u_1\cdot 3^{n-1}$.

Từ $\log u_5-2\log u_2=2\left(1+\sqrt{\log u_5-2\log u_2+1}\right)$ đặt $\left(1+\sqrt{\log u_5-2\log u_2+1}\right)=t$ ta được

$$\begin{aligned}
& t^2-1=2(1+t) \\
\Leftrightarrow\ & t^2-2t-3=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t=-1 \quad (\text{loại}) \\ t=3 \end{array}\right. \Rightarrow t=3 \\
\Rightarrow\ & \log u_5-2\log u_2+1=9 \\
\Leftrightarrow\ & \log(u_1\cdot 3^4)-2\log(u_1\cdot 3)=8 \\
\Leftrightarrow\ & -\log u_1=8-2\log 3 \\
\Leftrightarrow\ & \log u_1=\log\frac{9}{10^8} \\
\Leftrightarrow\ & u_1=\frac{9}{10^8} \\
\Leftrightarrow\ & u_n=\frac{9}{10^8}\cdot 3^{n-1}.
\end{aligned}$$

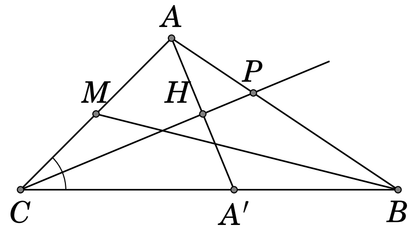
Khi đó

$$\begin{aligned}
& u_n<7^{100} \\
\Leftrightarrow\ & 3^{n-1}<\frac{10^8\cdot 7^{100}}{9} \\
\Leftrightarrow\ & n<192{,}89 \\
\Rightarrow\ & n=192.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B

Câu 42.

Gọi P là chân đường phân giác trong của góc C.



Vì C thuộc đường thẳng CP nên tọa độ C có dạng $C(2+2t;4-t;2-t)$.

Gọi M là trung điểm của AC khi đó $M\left(t+2;\frac{7-t}{2};\frac{5-t}{2}\right)$.

Thay tọa độ của điểm M vào phương trình BM ta được

$$\frac{t+2-3}{-1}=\frac{\frac{7-t}{2}-3}{2}=\frac{\frac{5-t}{2}-2}{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t-4=t-1 \\ 2t-2=1-t \end{cases} \Leftrightarrow t=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C(4;3;1) \\ M(3;3;2) \end{cases}.$$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A vuông góc với đường thẳng CP có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_{CP}=(2;-1;-1)$.

Khi đó (P): $2x-y-z+2=0$.

Phương trình tham số của đường phân giác CP là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=4-t \\ z=2-t. \end{cases}$

Gọi $H(2+2t;4-t;2-t)\in CP$ khi đó thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta được

$$2(2+2t)-(4-t)-(2-t)+2=0 \Leftrightarrow t=0$$

Suy ra $H(2;4;2)$ là hình chiếu của A lên đường thẳng CP.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua CP khi đó $A'(2;5;1)$, vì CP là đường phân giác nên $A'\in BC$.

Khi đó véc-tơ chỉ phương của CB là $\vec{u}_{CB}=\overrightarrow{CA'}=(-2;2;0)$ hay $\vec{u}_{CB}=(-1;1;0)$.

Chọn đáp án C

Câu 43. Xét hàm $y=f\left(2(\sin^4 x+\cos^4 x)\right)$, đặt $t=2(\sin^4 x+\cos^4 x)$.

Khi đó $t=2(\sin^4 x+\cos^4 x)=2-4\sin^2\cos^2 x=2-\sin^2 2x$.

Vì $\sin^2 2x\in[0;1]$ nên $t=2-\sin^2 2x\in[1;2]$.

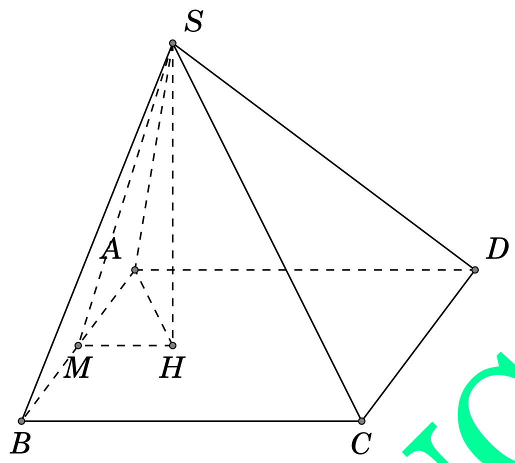
Xét hàm $y=f(t)$ với $t\in[1;2]$ dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} M=\max f(t)=3 \\ m=\min f(t)=1 \end{cases}$.

Vậy $M+m=3+1=4$.

Chọn đáp án B

Câu 44.

Giả sử $SH \perp (ABCD)$ tại H.



Khi đó $(SA,(ABCD)) = \widehat{SAH} = 45°$.

Gọi M là trung điểm của AB.

Vì $\triangle SAB$ cân nên $SM \perp AB$ mà $SH \perp AB$

Suy ra $AB \perp (SMH) \Rightarrow ((SAB),(ABCD)) = \widehat{SMH}$.

Khi đó $\widehat{SMH} = 60°$.

Đặt $\begin{cases} SH = x \\ AB = y \end{cases} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}y^2x = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $xy^2 = 8a^3\sqrt{3} \quad (1)$.

Xét $\triangle SAH$ có $\sin\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{SA} \Rightarrow SA = x\sqrt{2}$.

Xét $\triangle SHM$ có $\sin\widehat{SMH} = \dfrac{SH}{SM} \Rightarrow SM = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$.

Xét $\triangle SAM$ vuông tại M ta có $SA^2 = SM^2 + MA^2 \Rightarrow y^2 = \dfrac{8x^2}{3}$.

Thế vào (1) ta được $x^3 = 3a^3\sqrt{3} \Rightarrow x = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A

Câu 45. Đặt $z = x + yi$, điểm biểu diễn của z là $M(x;y)$.

Khi đó $|z+1| + |z-3-4i| = 10 \Leftrightarrow MA + MB = 10$ với $A(-1;0)$ và $B(3;4)$.

Suy ra M thuộc elip có độ dài trục lớn là $10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$ và hai tiêu điểm là A, B.

Mà $\overrightarrow{AB} = (4;4) \Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow 2c = 4\sqrt{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= |\overline{z} - 1 + 2i| \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = MH \end{aligned}$$

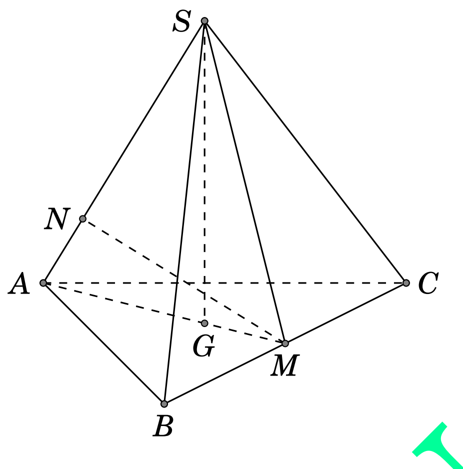
Với $H(1;2)$. Dễ thấy A, B, H thẳng hàng nên H thuộc đoạn AB.

Do đó $P_{\min} \Leftrightarrow MH$ ngắn nhất khi và chỉ khi M thuộc trục nhỏ của elip.

Khi đó độ dài MH bằng một nửa trục nhỏ hay $MH = b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án A

Câu 46.



Đặt $AB = BC = CA = x$.

Gọi M là trung điểm BC và N là chân đường vuông góc hạ từ M đến SA.

Ta có $\begin{cases} (SAB)\cap(ABC) = BC \\ (SAM)\perp BC \\ (SAM)\perp(SBC) = SM \\ (SAM)\perp(ABC) = AM \end{cases}$.

Suy ra $((SBC),(ABC)) = (SM,AM) = \widehat{SMA} = 60^\circ$.

Tam giác ABC đều nên

$$AM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GM = \frac{1}{3}AM = \frac{x\sqrt{3}}{6}.$$

Tam giác SGM vuông tại G nên $\tan\widehat{SMG} = \dfrac{SG}{GM} \Rightarrow SG = \dfrac{x}{2}$.

Vì $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp MN$ do đó MN là đoạn vuông góc chung của SA, BC.

Khi đó $MN = \dfrac{6\sqrt{7}}{7}$.

Tam giác SAG có $SA = \sqrt{SG^2 + AG^2} = \dfrac{x\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$.

Diện tích tam giác SAM là $S_{SAM} = \dfrac{1}{2}SG\cdot AM = \dfrac{1}{2}MN\cdot SA \Rightarrow x = 4$.

Khi đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{x}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A

Câu 47. Ta có

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = m \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = m.$$

Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$ ta có $0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2^{\sin^2 x} \le 2$ hay $t \in [1;2]$.

Xét hàm $f(t) = t + \dfrac{2}{t}$ với $t \in [1;2]$.

Có $f'(t) = 1 - \dfrac{2}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	1		$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	3

Mà phương trình trên tương đương với $f(t) = m$.

Do đó để phương trình có nghiệm thì $m \in [2\sqrt{2};3]$.

Chọn đáp án (C)

Câu 48. Để rút được bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị thì 3 thẻ rút được phải không có hai thẻ nào là hai số tự nhiên liên tiếp.

Số cách rút 3 thẻ bất kì là C_{26}^{3}.

Số cách rút ra 3 thẻ có đúng hai số tự nhiên liên tiếp được xác định như sau:

Chọn 2 số tự nhiên liên tiếp: $\{1,2\}$; $\{2,3\}$;...; $\{25,26\}$.

TH1. Chọn hai thẻ liên tiếp là $\{1,2\}$ hoặc $\{25,26\}$ có hai cách, thẻ còn lại không được chọn là thẻ số 3 hoặc 24 do đó có 23 cách.

Vậy có $2\cdot 23=46$ cách.

TH2. Chọn hai thẻ là một trong các cặp $\{2,3\}$; $\{3,4\}$; ...; $\{24,25\}$ có 23 cách, chọn thẻ còn lại chỉ có $26-4=22$ cách.

Vậy có $23\cdot 22=506$ cách.

Số cách chọn 3 thẻ trong đó 3 thẻ được đánh số tự nhiên liên tiếp là $\{1,2,3\}$; $\{2,3,4\}$; ...; $\{24,25,26\}$ có 24 cách.

Vậy có $C_{26}^{3}-46-506-24=2024$ cách chọn bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị.

Chọn đáp án (D)

Câu 49. Nhận xét $(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}-1)=9 \Rightarrow (\sqrt{10}+1)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{10}-1)^{\frac{1}{2}}=3$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$m=\frac{6\cdot 3^{x^2}-(\sqrt{10}+1)^{x^2}}{(\sqrt{10}-1)^{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad m=\frac{6((\sqrt{10}+1)^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{10}-1)^{\frac{x^2}{2}}}{(\sqrt{10}-1)^{x^2}}-\left(\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}\right)^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad m=6\cdot\left(\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}\right)^{\frac{x^2}{2}}-\left(\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}\right)^{x^2}.$$

Đặt $\left(\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}\right)^{\frac{x^2}{2}}=t$ vì $\frac{x^2}{2}\geq 0 \Rightarrow t\geq 1$.

Ta có phương trình $m=6t-t^2$ (1) với $t\geq 1$.

Xét hàm số $f(t)=6t-t^2 \Rightarrow f'(t)=6-2t \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=3$.

Bảng biến thiên

t	1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Để phương trình có đúng hai nghiệm x thì phương trình (1) phải có một nghiệm $t>1$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có đúng một nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=9 \\ m<5. \end{array}\right.$

Suy ra có 15 giá trị của m nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án B

Câu 50. Xét hàm $g(x)=x^4-4x^3+4x^2+a \Rightarrow g'(x)=4x^3-12x^2+8x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$1+a$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm $f(x)=|g(x)|$

TH1. Đồ thị hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox khi $a \geq 0$.

Khi đó đồ thị hàm $y=f(x)$ giống đồ thị hàm $g(x)$.

Suy ra $\begin{cases} \max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=1+a=M \\ \min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=f(0)=a=m. \end{cases}$

Theo đề bài $M \leq 2m \Leftrightarrow 1+a \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 1$.

Kết hợp điều kiện $a \geq 1$.

TH2. Đồ thị hàm $f(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành khi $1+a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -1$. Khi đó đồ thị hàm $f(x)$ thu được bằng cách đối xứng đồ thị của hàm $g(x)$ qua trục hoành.

Suy ra $\begin{cases} M=-a \\ m=-a-1 \end{cases}$. Theo đề bài $M \leq 2m \Leftrightarrow -a \leq -2a-2 \Leftrightarrow a \leq -2$.

Kết hợp với điều kiện $a \leq -2$.

TH3. Nếu $\frac{a+(1+a)}{2} \ge 0 \Leftrightarrow a \ge -\frac{1}{2}$. Khi đó $\begin{cases} M = 1+a \\ m = 0. \end{cases}$

Theo đề bài $M \le 2m \Leftrightarrow a \le -1$.

Kết hợp với điều kiện suy ra không có giá trị a thỏa mãn.

TH4. Nếu $\frac{a+(1+a)}{2} \le 0 \Leftrightarrow a \le -\frac{1}{2}$. Khi đó $\begin{cases} M = -a \\ m = 0. \end{cases}$

Theo đề bài $M \le 2m \Leftrightarrow a \ge 0$.

Kết hợp với điều kiện suy ra không có giá trị a thỏa mãn.

Từ 4 trường hợp trên ta được $\left[\begin{array}{l} a \ge 1 \\ a \le -2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của a thuộc $[-4;4]$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A