GV NGUYỄN KHẮC HƯỞNG

ĐỀ SỐ 032

(*Đề thi có 6 trang*)

ĐỀ ÔN TẬP THI THPT QUỐC GIA 2018

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút.

(Khảo sát lớp 12 năm học 2017-2018, Chu Văn An, Hà Nội)

Mã đề thi 032

Họ và tên thí sinh:...............................

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+y-z+2=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

A. $(1;-2;1)$. **B.** $(1;2;1)$. **C.** $(1;1;-1)$. **D.** $(2;1;1)$.

Câu 2. Hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng

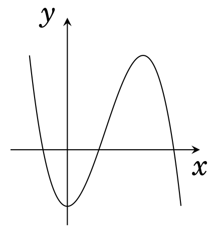
A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số đã cho có mấy điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2.

C. 4. **D.** 1.



Câu 4. Nguyên hàm $I=\int \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$. **B.** $-\ln|2x+1|+C$. **C.** $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$. **D.** $\ln|2x+1|+C$.

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y=\log(2x-x^2)$ là

A. $\mathscr{D}=[0;2]$. **B.** $\mathscr{D}=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

C. $\mathscr{D}=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=(0;2)$.

Câu 6. Điểm biểu diễn của số phức z là $M(1;2)$. Tọa độ của điểm biểu diễn cho số phức $w=z-2\bar{z}$ là

A. $(2;-3)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(-1;6)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M\in(Oxz)$. **B.** $M\in(Oyz)$. **C.** $M\in Oy$. **D.** $M\in(Oxy)$.

Câu 8. Mỗi đỉnh của một đa diện là đỉnh chung của ít nhất bao nhiêu mặt?

A. Ba mặt. **B.** Hai mặt. **C.** Bốn mặt. **D.** Năm mặt.

Câu 9. Giới hạn $\lim\frac{\sin n+1}{n}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+3t \\ z = 2 \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$. Tọa độ một véc-tơ chỉ phương của d là

A. $(-2;3;0)$. **B.** $(-2;3;3)$. **C.** $(1;2;3)$. **D.** $(2;3;0)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $P(a;b;c)$. Khoảng cách từ điểm P đến trục tọa độ Oy bằng

A. $\sqrt{a^2+c^2}$. **B.** b. **C.** $|b|$. **D.** a^2+c^2.

Câu 12. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $P=(z_1-2z_2)\overline{z}_2-4z_1$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** -5. **D.** -15.

Câu 13. Đồ thị của hàm số $y=x^4-x^3-2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

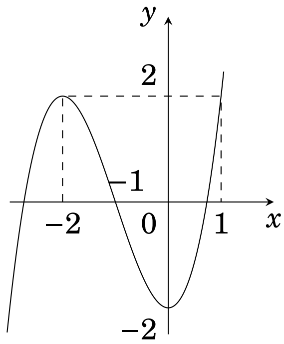
Câu 14. Có bao nhiêu cách chia hết 4 đồ vật khác nhau cho 3 người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật?

A. 72. **B.** 18. **C.** 12. **D.** 36.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\mathrm{d}x = 17$. Khi đó $f(4)$ bằng

A. 5. **B.** 29. **C.** 19. **D.** 9.

Câu 16. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, với a, b, c là các số thực và $a \neq 0$, có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

B. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=-2$.

C. $y'<0$, $\forall x \in (-2;0)$.

D. Đồ thị hàm số có đúng hai điểm cực trị.

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n), $n \in \mathbb{N}^*$ có số hạng tổng quát $u_n = 1-3n$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng

A. -59048. **B.** -59049. **C.** -155. **D.** -310.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$ và mặt phẳng (P): $2x-2y+z=0$. Mặt phẳng (P) cắt khối cầu (S) theo thiết diện là một hình tròn có diện tích bằng

A. 5π. **B.** 25π. **C.** $2\pi\sqrt{5}$. **D.** 10π.

Câu 19. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\cos x+1}{\cos x-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M+9m=0$. **B.** $9M-m=0$. **C.** $9M+m=0$. **D.** $M+m=0$.

Câu 20. Một người thợ thủ công làm mô hình đèn lồng hình bát diện đều, mỗi cạnh của bát diện đó được làm từ các que tre có độ dài 8 cm. Hỏi người đó cần bao nhiêu mét que tre để làm 100 cái đèn (giả sử mối nối giữa các que tre có độ dài không đáng kể)?

A. 96 m. **B.** 960 m. **C.** 192 m. **D.** 128 m.

Câu 21. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t)=t^2-\dfrac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t=2$. **B.** $t=0{,}5$. **C.** $t=2{,}5$. **D.** $t=1$.

Câu 22. Cho $a=\log_2 5,\ b=\log_2 9$. Biểu diễn của $P=\log_2\dfrac{40}{3}$ theo a và b là

A. $P=3+a-2b$. **B.** $P=3+a-\dfrac{1}{2}b$. **C.** $P=\dfrac{3a}{2b}$. **D.** $P=3+a-\sqrt{b}$.

Câu 23. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $a<b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3f(x)$, $y=3g(x)$, $x=a$, $x=b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)-2$, $y=g(x)-2$, $x=a$, $x=b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_1=2S_2$. **B.** $S_1=3S_2$. **C.** $S_1=2S_2-2$. **D.** $S_1=2S_2+2$.

Câu 24. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 25. Phương trình $3^{|4x-4|}=81^{m-1}$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m<0$. **B.** $m\le 0$. **C.** $m<1$. **D.** $m\le 1$.

Câu 26. Tích tất cả các giá trị của x thỏa mãn phương trình $(3^x-3)^2-(4^x-4)^2=(3^x+4^x-7)^2$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 27. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\left(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}\right)\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^4\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}\right)\pi}{2}$.

Câu 28. Số phức $z=(1+\mathrm{i})+(1+\mathrm{i})^2+\cdots+(1+\mathrm{i})^{2018}$ có phần ảo bằng

A. $2^{1009}-1$. **B.** $2^{1009}+1$. **C.** $1-2^{1009}$. **D.** $-2^{1009}-1$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA=SB=SD=a$, $\widehat{BAD}=60^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị $T = a+2b+3c$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $2x+y-2z+9=0$ và ba điểm $A(2;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;3;-1)$. Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x_M+y_M+z_M=1$. **B.** $x_M+y_M+z_M=4$. **C.** $x_M+y_M+z_M=3$. **D.** $x_M+y_M+z_M=2$.

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=\widehat{DAB}=90^\circ$, $AB=1$, $AC=2$, $AD=3$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị (C_m): $y=\dfrac{mx+3}{1-x}$ có tiệm cận và tâm đối xứng của (C_m) thuộc đường thẳng $d: 2x-y+1=0$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa AM và BD bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

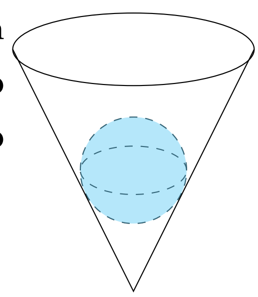
Câu 35. Một nhóm học sinh gồm 5 bạn nam và 5 bạn nữ được xếp theo một hàng dọc. Xác suất để 5 bạn nữ đứng cạnh nhau bằng

A. $\dfrac{1}{35}$. **B.** $\dfrac{1}{252}$. **C.** $\dfrac{1}{50}$. **D.** $\dfrac{1}{42}$.

Câu 36. Khai triển của biểu thức $(x^2+x+1)^{2018}$ được viết thành $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{4036}x^{4036}$. Tổng $S=a_0-a_2+a_4-a_6+\cdots-a_{4034}+a_{4036}$ bằng

A. -2^{1009}. **B.** 0. **C.** 2^{1009}. **D.** -1.

Câu 37. Bạn An có một cốc giấy hình nón có đường kính đáy là 10 cm và độ dài đường sinh là 8 cm. Bạn dự định đựng một viên kẹo hình cầu sao cho toàn bộ viên kẹo nằm trong cốc (không phần nào của viên kẹo cao hơn miệng cốc). Hỏi bạn An có thể đựng được viên kẹo có đường kính lớn nhất bằng bao nhiêu?



A. $\dfrac{64}{\sqrt{39}}$ cm. **B.** $\dfrac{5\sqrt{39}}{13}$ cm. **C.** $\dfrac{32}{\sqrt{39}}$ cm. **D.** $\dfrac{10\sqrt{39}}{13}$ cm.

Câu 38. Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị nhận gốc tọa độ O làm trực tâm thì giá trị của tham số m bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 2.

Câu 39. Phương trình $\cos 2x \sin 5x + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 40. Biết tích phân $\int\limits_0^1 \frac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, giá trị của a bằng

A. 7. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 41. Tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$$

có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. $S = \left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$. **B.** $S = \left\{\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2}\right\}$. **C.** $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$. **D.** $S = \left\{\frac{1}{2}; 1; -\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 42. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \frac{\pi}{4}$. **B.** $I = \frac{\pi}{6}$. **C.** $I = \frac{\pi}{20}$. **D.** $I = \frac{\pi}{16}$.

Câu 43. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = 4$, $|z_2| = 3$, $|z_3| = 2$ và $|4z_1 \cdot z_2 + 16z_2 \cdot z_3 + 9z_1 \cdot z_3| = 48$. Giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2 + z_3|$ bằng

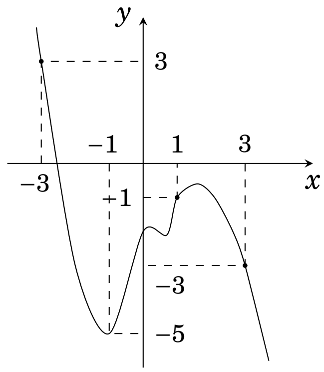
A. 1. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 44.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-3;1)$. **B.** $(-2;0)$.

C. $(1;3)$. **D.** $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

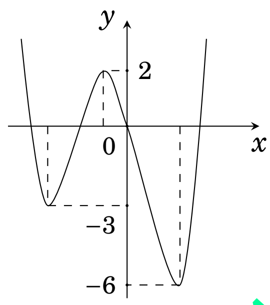


Câu 45. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 10^6 được thành lập từ hai chữ số 0 và 1. Lấy ngẫu nhiên hai số trong S. Xác suất để lấy được ít nhất một số chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{4473}{8128}$. **B.** $\frac{2279}{4064}$. **C.** $\frac{55}{96}$. **D.** $\frac{53}{96}$.

Câu 46.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x+1)+m|$ có 5 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 1.

C. 3. **D.** 0.

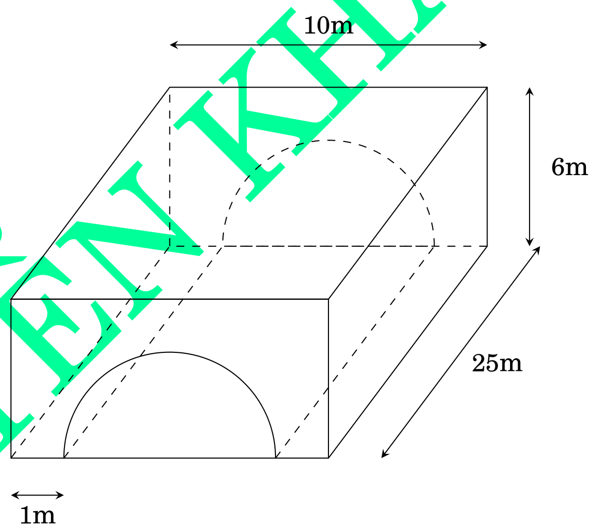
Câu 47. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'C$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}a$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}a$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}a$.

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + 3x + 1$ có đồ thị là (C). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để từ điểm $M(0;m)$ kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C) mà hoành độ tiếp điểm thuộc đoạn $[1;3]$?

A. 61. **B.** 0. **C.** 60. **D.** Vô số.

Câu 49. Viện Hải dương học dự định làm một bể cá bằng kính phục vụ khách tham quan (như hình vẽ), biết rằng mặt cắt dành cho lối đi là nửa hình tròn.



Tổng diện tích mặt kính của bể cá gần nhất với số nào sau đây?

A. 872 m^2. **B.** 914 m^2. **C.** 984 m^2. **D.** 949 m^2.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;2;-5)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max} = 3$. **B.** $T_{\max} = 2\sqrt{6} - 3$. **C.** $T_{\max} = \sqrt{57}$. **D.** $T_{\max} = 3\sqrt{6}$.

— **HẾT** —

Đáp án và lời giải chi tiết

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 C	**6** C	**11** A	**16** B	**21** A	**26** B	**31** B	**36** D	**41** A	**46** C
2 C	**7** A	**12** D	**17** C	**22** B	**27** D	**32** D	**37** D	**42** C	**47** B
3 B	**8** A	**13** A	**18** A	**23** B	**28** B	**33** B	**38** A	**43** C	**48** A
4 C	**9** D	**14** D	**19** C	**24** A	**29** D	**34** D	**39** B	**44** B	**49** C
5 D	**10** A	**15** B	**20** A	**25** C	**30** D	**35** D	**40** A	**45** C	**50** A

LỜI GIẢI CHI TIẾT CÁC CÂU

Câu 1. Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1;1;-1)$.

Chọn đáp án C

Câu 2.

Ta có $y' = 8x^3$, suy ra

$y' = 0 \Leftrightarrow 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên (như hình bên)

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án C

Câu 3. Dựa vào đồ thị suy ra hàm số có 2 cực trị.

Chọn đáp án B

Câu 4. Sử dụng công thức $\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$, ta được

$$\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$$

Chọn đáp án C

Câu 5. Điều kiện $2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (0;2)$.

Chọn đáp án D

Câu 6. Từ giả thiết suy ra $z = 1 + 2i$.

Từ đó $w = z - 2\bar{z} = (1+2i) - 2(1-2i) = -1 + 6i$.

Vậy tọa độ của điểm biểu diễn số phức w là $(-1;6)$.

Chọn đáp án C

Câu 7. Mọi điểm có thành phần tung độ bằng 0 đều thuộc mặt phẳng (Oxz). Do đó điểm $M(1;0;2)$ thuộc mặt phẳng (Oxz).

Chọn đáp án A

Câu 8. Theo định nghĩa của đa diện, mỗi đỉnh của đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt.

Chọn đáp án A

Câu 9. Với mọi $n>0$ thì $|\sin n+1|\le 2$. Do đó, với mọi $n>0$, ta có

$$0\le\left|\frac{\sin n+1}{n}\right|\le\frac{2}{n}.$$

Từ đó

$$0\le\lim\left|\frac{\sin n+1}{n}\right|\le\lim\frac{2}{n}=0\Rightarrow\lim\left|\frac{\sin n+1}{n}\right|=0\Rightarrow\lim\frac{\sin n+1}{n}=0.$$

Chọn đáp án D

Câu 10. Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(-2;3;0)$.

Chọn đáp án A

Câu 11.

Ta có $\mathrm{d}(P;Oy)=PK$.

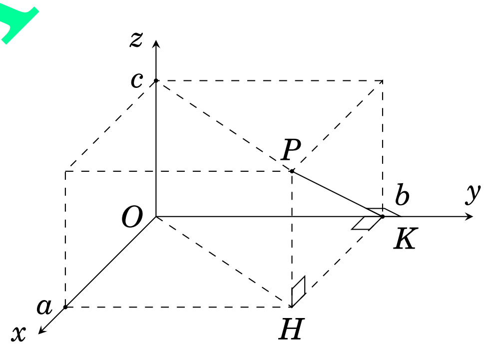
Tam giác PHK vuông tại H, có

$PH=|c|$,

$HK=|a|$

$\Rightarrow PK=\sqrt{PH^2+HK^2}=\sqrt{c^2+a^2}$.

Chú ý: Có thể sử dụng ứng dụng của tích có hướng.



Chọn đáp án A

Câu 12. Ta có $P=z_1\cdot\overline{z}_2-2z_2\cdot\overline{z}_2-4z_1=(z_1)^2-2|z_2|^2-4z_1=(z_1)^2-2|z_1|^2-4z_1$.

Giải phương trình đã cho, thu được hai nghiệm là $2\pm\mathrm{i}$.

- Nếu $z_1=2-\mathrm{i}$ thì $P=(2-\mathrm{i})^2-2(2^2+1^2)-4(2-\mathrm{i})=4-4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2-10-8+4\mathrm{i}=-15$.
- Nếu $z_1=2+\mathrm{i}$ thì $P=(2+\mathrm{i})^2-2(2^2+1^2)-4(2+\mathrm{i})=4+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2-10-8-4\mathrm{i}=-15$.

Vậy $P=-15$.

Chọn đáp án D

Câu 13. Ta có $y'=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$			$-\frac{539}{256}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm.

Chọn đáp án A

Câu 14. Cách 1. Một cách chia thỏa mãn là một cách chia sao cho có một người nhận được 2 đồ vật, hai người còn lại, mỗi người nhận được 1 đồ vật.

Nếu chia người thứ nhất 2 đồ vật, hai người còn lại, mỗi người nhận 1 đồ vật, thì số cách chia bằng $\mathrm{C}_4^2 \cdot 2$ (cách). Tương tự, nếu chia người thứ hai (thứ ba) 2 đồ vật, hai người còn lại, mỗi người nhận 1 đồ vật thì số cách chia cũng bằng $\mathrm{C}_4^2 \cdot 2$ (cách).

Vậy số cách chia thỏa mãn bài toán bằng $3 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot 2 = 36$ (cách).

Cách 2. Để có một cách chia thỏa mãn, đầu tiên ta xếp 4 vật thành hàng ngang, sau đó sử dụng 2 thanh que đặt vào giữa các vật đó, chẳng hạn

$$*|*|**$$

là cách chia cho người thứ nhất và người thứ hai 1 đồ vật, người thứ ba 2 đồ vật; còn

$$*|**|*$$

là cách chia cho người thứ nhất và người thứ ba 1 đồ vật, người thứ hai 2 đồ vật.

Vì có 4! cách xếp các đồ vật khác nhau thành hàng ngang. Ứng với mỗi cách xếp đó, có C_3^2 cách đặt 2 thanh que vào 3 vị trí và, hoán vị hai đồ vật khi chia cho một người không sinh ra cách chia mới, nên số cách chia bằng

$$\frac{1}{2!} \cdot 4! \times \mathrm{C}_3^2 = 36.$$

Chọn đáp án D

Câu 15. Ta có

$$\int_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(1) \Rightarrow f(4) = \int_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x + f(1) = 17 + 12 = 29.$$

Chọn đáp án B

Câu 16. Khẳng định **sai** là: "Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = -2$". Lí do: có thể thấy với $x > 1$ thì $f(x) > f(-2)$.

Sửa lại đúng: "Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$".

Chọn đáp án B

Câu 17. Ta có
$$S_{10}=\frac{10(u_1+u_{10})}{2}=5[(1-3\cdot 1)+(1-3\cdot 10)]=-155.$$
Chọn đáp án (C)

Câu 18.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;-2)$, bán kính $R=3$.

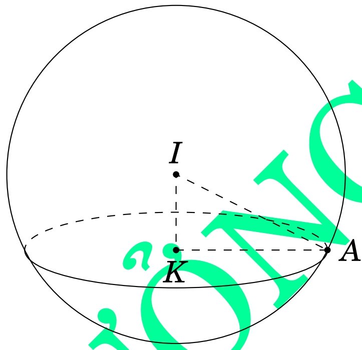
$IK=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2(-1)-2\cdot 1+(-2)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=2.$

Bán kính của đường tròn thiết diện

$r=KA=\sqrt{R^2-IK^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}.$

Vậy diện tích của hình tròn thiết diện bằng

$S=\pi\cdot r^2=5\pi.$



Chọn đáp án (A)

Câu 19. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đặt $t=\cos x$, với $x\in\mathbb{R}\Rightarrow t\in[-1;1]$. Thu được hàm $f(t)=\dfrac{2t+1}{t-2}$, $t\in[-1;1]$ và $M=\max\limits_{[-1;1]} f(t)$, $m=\min\limits_{[-1;1]} f(t)$.

Vì $f(t)$ nghịch biến trên $[-1;1]$, nên $M=f(-1)=\dfrac{1}{3}$, $m=f(1)=-3$.

Vậy mệnh đúng là $9M+m=0$.

Chọn đáp án (C)

Câu 20.

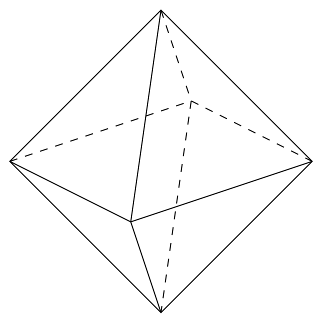
Mỗi bát diện đều có 12 cạnh và tất cả các cạnh bằng nhau.

Từ đó suy ra số que tre để người đó làm 100 cái đèn lồng là

$100\cdot 12=1200$ (que).

Vì mỗi que tre có độ dài 8 cm = 0,08 m, nên người đó cần dùng

$1200\times 0{,}08=96$ m (que tre).



Chọn đáp án (A)

Câu 21. Ta có $v(t)=s'(t)=2t-\dfrac{1}{2}t^2$. Suy ra $v'(t)=2-t$ và $v'(t)=0\Leftrightarrow t=2$.

Bảng biến thiên

t		2	
$v'(t)$	+	0	−
$v(t)$	↗	2	↘

Vậy chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (giây).

Chọn đáp án (A)

Câu 22. Ta có

$$\log_2 \frac{40}{3} = \log_2 40 - \log_2 3 = \log_2(5\cdot 8) - \frac{1}{2}\log_2 9 = \log_2 5 + \log_2 8 - \frac{1}{2}\log_2 9 = a + 3 - \frac{1}{2}b.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 23. Từ giả thiết, suy ra

$$S_1 = \int_a^b |3f(x) - 3g(x)|\,\mathrm{d}x = 3\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$S_2 = \int_a^b |[f(x)-2] - [g(x)-2]|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow S_1 = 3S_2.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 24. Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = -1 \Rightarrow y = -1$ là một tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = 1 \Rightarrow y = 1$ là một tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = +\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận.

Chọn đáp án (A)

Câu 25. Phương trình đã cho tương đương

$3^{|4x-4|} = 3^{4(m-1)} \Leftrightarrow 4|x-1| = 4(m-1)$.

Do vế trái không âm nên phương trình trên vô nghiệm khi và chỉ khi

$m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án (C)

Câu 26. Phương trình đã cho tương đương $(3^x-3)^2 - (4^x-4)^2 = [(3^x-3)+(4^x-4)]^2$.

Đặt $a = 3^x - 3,\ b = 4^x - 4$. Thu được

$a^2 - b^2 = (a+b)^2 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) - (a+b)^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(-2b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -a \\ b = 0 \end{array}\right.$.

- Với $b=-a$ thì $4^x-4=-3^x+3 \Leftrightarrow 4^x+3^x=7$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$ (vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm hằng).
- Với $b=0$ thì $4^x-4=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng 1.

Chọn đáp án B

Câu 27. Thể tích của khối tròn xoay cần tìm bằng

$V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(e^x\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}\left(e^2-e^{-2}\right)=\frac{\left(e^2-e^{-2}\right)\pi}{2}$.

Chọn đáp án D

Câu 28. Ta có

$$z=(1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^{2018}=(1+i)\frac{(1+i)^{2018}-1}{(1+i)-1}=\frac{(1+i)^{2019}-1-i}{i}.$$

$$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i \Rightarrow (1+i)^4=(2i)^2=-2^2$$

$$\Rightarrow (1+i)^{2019}=(1+i)^{4\cdot 504+3}=(1+i)^{4\cdot 504}\times(1+i)^2\times(1+i)=2^{1009}\cdot i\cdot(1+i).$$

$$\Rightarrow z=2^{1009}(1+i)-\frac{1}{i}-1=2^{1009}(1+i)+i-1=(2^{1009}-1)+(2^{1009}+1)i.$$

Vậy phần ảo của z bằng $2^{1009}+1$.

Chọn đáp án B

Câu 29.

Vì $\triangle BAD$ cân và có góc 60° nên là tam giác đều.

Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

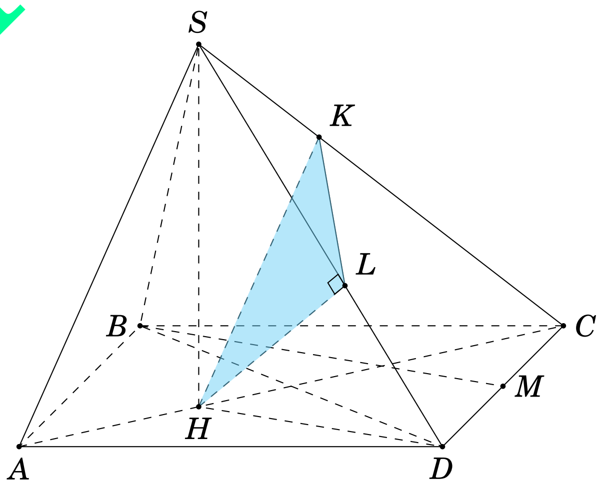
Do $SA=SB=SD$ nên $HA=HB=HD$, suy ra H là tâm của tam giác đều ABD.

Gọi M là trung điểm của CD.

Do $HD \parallel BM$ và $BM\perp CD$ nên $HD\perp CD$.

Từ $CD\perp HD$, $CD\perp SH \Rightarrow CD\perp(SHD)$.

Trong $\triangle SHD$ kẻ $HL\perp SD$ thì $HL\perp(SCD)$.



Trong $\triangle SAC$, kẻ $HK\parallel SA$. Khi đó, góc giữa SA và (SCD) phụ với góc giữa HK và HL.

Ta có

$\frac{HK}{SA}=\frac{CH}{CA}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow HK=\frac{2}{3}SA=\frac{2a}{3}$.

$$HL=\frac{HD\cdot HS}{SD}=\frac{HD\cdot\sqrt{SD^2-HD^2}}{SD}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Tam giác HKL vuông tại L nên $\cos\widehat{KHL}=\frac{HL}{HK}=\frac{a\sqrt{2}}{3}\div\frac{2a}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{KHL}=45^\circ$.

Vậy góc giữa SA và (SCD) bằng $90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

Chọn đáp án D

Câu 30. Vì $S_{\mathrm{MAB}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \mathrm{d}(M, AB)$ nên S_{MAB} nhỏ nhất khi $\mathrm{d}(M, AB)$ nhỏ nhất.

Phương trình của AB: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 \end{cases}$. Dễ dàng kiểm tra AB và d chéo nhau.

Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng AB. Khi đó $\mathrm{d}(M, AB) = MH$ nhỏ nhất khi MH là đoạn vuông góc chung của d và AB.

Ta có

$M \in d \Rightarrow M(-1+s; s; 1+s)$, $H \in AB \Rightarrow H(t; -1+2t; 2)$, $\overrightarrow{MH} = (t - s + 1; 2t - s - 1; 1 - s)$.

Véc-tơ chỉ phương của d và AB theo thứ tự là $\vec{u} = (1;1;1)$, $\vec{v} = (1;2;0)$.

Vì $\begin{cases} \overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{MH} \perp \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1(t-s+1) + 1(2t-s-1) + 1(1-s) = 0 \\ 1(t-s+1) + 2(2t-s-1) + 0(1-s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Vậy $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$. Từ đó $T = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{7}{3} = 10$.

Chọn đáp án D

Câu 31. Gọi $G(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Ta có

$\overrightarrow{GA} = (2-a; 1-b; -c)$, $\overrightarrow{GB} = (-a; 2-b; 1-c)$, $\overrightarrow{GC} = (1-a; 3-b; -1-c)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(2-a) + 3(-a) - 4(1-a) = 0 \\ 2(1-b) + 3(2-b) - 4(3-b) = 0 \\ 2(-c) + 3(1-c) - 4(-1-c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow G(0; -4; 7).$$

Ta có

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC} = 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + 3\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) - 4\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)$$
$$= \overrightarrow{MG} + \left(2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 4\overrightarrow{GC}\right) = \overrightarrow{MG}.$$

Từ đó $\left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MG}\right|$, đạt giá trị nhỏ nhất khi M là hình chiếu của G lên (α).

Phương trình của đường thẳng d qua G và vuông góc với (α) là $\begin{cases} x = 2t \\ y = -4 + t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$.

Điểm M là giao của d và (α). Giải hệ $\begin{cases} x = 2t \\ y = -4 + t \\ z = 7 - 2t \\ 2x + y - 2z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2; -3; 5)$.

Vậy $x_{\mathrm{M}} + y_{\mathrm{M}} + z_{\mathrm{M}} = 4$.

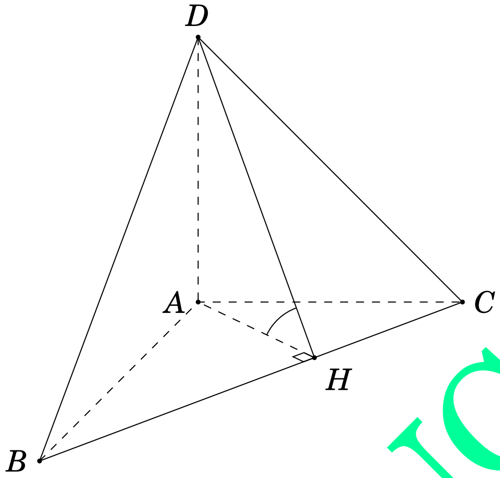
Chọn đáp án B

Câu 32.

Từ giả thiết suy ra $AD \perp (ABC)$.

Trong $\triangle ABC$, kẻ $AH \perp AC$. Khi đó $BC \perp (DAH)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AH và DH và bằng góc $\widehat{DHA}$.



Tam giác DAH vuông tại A

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{3^2 + \frac{4}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{DHA} = \frac{AH}{DH} = \frac{2}{\sqrt{5}} \div \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{2}{7}.$$

Chọn đáp án D

Câu 33. Đồ thị hàm số có tiệm cận khi $ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow m \cdot 1 - 3(-1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$.

Khi đó, hai tiệm cận của đồ thị là $x = 1$ và $y = -m$ và tâm đối xứng của đồ thị là $I(1;-m)$.

Điểm I thuộc đường thẳng d khi $2 \cdot 1 - (-m) + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ (không xảy ra).

Vậy đáp án của bài toán là 0.

Chọn đáp án B

Câu 34.

Cách 1. Ta có

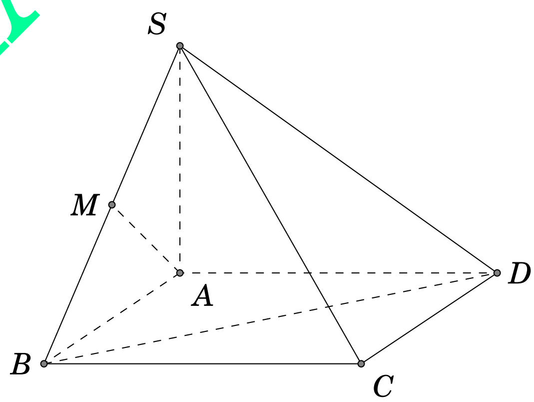
$$2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$$

$$= AB \cdot BD \cdot \cos 135^\circ = -\frac{a \cdot a\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = -a^2.$$

Từ đó

$$\cos\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BD}\right) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}}{AM \cdot BD} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BD}\right) = 120^\circ.$$



Vậy góc giữa AM và BD bằng 60°.

Cách 2. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$. Khi đó ta có tọa độ các điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $S(0;0;1)$, $M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$. Từ đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BD} = (-1;1;0)$. Và

$$\cos(AM;BD) = \left|\cos\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BD}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{\left|\frac{1}{2}(-1) + 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0\right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (AM;BD) = 60^\circ.$$

Chọn đáp án D

Câu 35. Xếp thành một hàng dọc tùy ý có 10! cách. Suy ra $n(\Omega) = 10!$.

Gọi A là biến cố: “xếp 5 nam và 5 nữ thành hàng dọc sao cho 5 bạn nữ đứng cạnh nhau”.
Ghép 5 bạn nữ lại và xem là một người. Xếp 6 bạn, trong đó có 5 bạn nam và 1 bạn nữ (ghép), có 6! cách.
Vì có 5! cách ghép 5 bạn nữ lại với nhau nên số cách xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ thành một hàng dọc sao cho 5 bạn nữ đứng cạnh nhau, bằng $5! \times 6!$ cách. Suy ra $\mathrm{n}(A) = 5! \times 6!$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(\Omega)} = \dfrac{5! \times 6!}{10!} = \dfrac{1}{42}$.
Chọn đáp án D

Câu 36. Ta có $i^2 = -1$, $i^4 = 1 \Rightarrow i^{4m+2} = -1$, $i^{4m} = 1$ với mọi m nguyên dương.
Theo giả thiết thì $(x^2 + x + 1)^{2018} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{4036} x^{4036}$.
Cho $x = i$, thu được

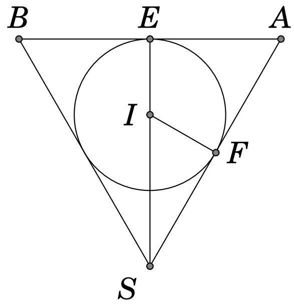
$$\left[(i)^2 + i + 1\right]^{2018} = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + a_4 i^4 + \cdots + a_{4034} i^{4034} + a_{4035} i^{4035} + a_{4036} i^{4036}$$

$$\Leftrightarrow i^{2018} = a_0 + a_1 i - a_2 + a_3 i^3 + a_4 + \cdots - a_{4034} + a_{4035} i^{4035} + a_{4036}$$

$$\Leftrightarrow -1 = (a_0 - a_2 + a_4 + \cdots - a_{4034} + a_{4036}) + \left(a_1 i + a_3 i^3 + \cdots + a_{4035} i^{4035}\right). \quad (1)$$

Chú ý rằng với mọi $n = 2m+1$ lẻ thì $i^n = i^{2m+1} = i^{2m} i = (-1)^m i$ là số thuần ảo, nên
$(1) \Leftrightarrow -1 = a_0 - a_2 + a_4 - \cdots - a_{4034} + a_{4036}$.
Chọn đáp án D

Câu 37.



Xét mặt cắt qua trục của hình nón. Khi đó, thiết diện thu được với hình nón là tam giác cân SAB và thiết diện với viên kẹo là hình tròn tâm I bán kính r.
Viên kẹo không cao hơn miệng cốc nếu $SI + r \le SE$. Do đó, viên kẹo lớn nhất mà vẫn còn đựng được trong cốc khi $SI + r_{\max} = SE$, khi đó đường tròn thiết diện là đường tròn nội tiếp tam giác SAB.
Ta có

$$p_{\mathrm{ABS}} = \frac{2SA + AB}{2} = \frac{2 \cdot 8 + 10}{2} = 13,\ S_{\mathrm{ABS}} = \sqrt{13(13-8)(13-8)(13-10)} = 5\sqrt{39}$$

$$\Rightarrow r_{\max} = \frac{S_{\mathrm{ABS}}}{p_{\mathrm{ABS}}} = \frac{5\sqrt{39}}{13}.$$

Vậy đường kính của viên kẹo là $2r_{\max} = \dfrac{10\sqrt{39}}{13}$ cm.
Chọn đáp án D

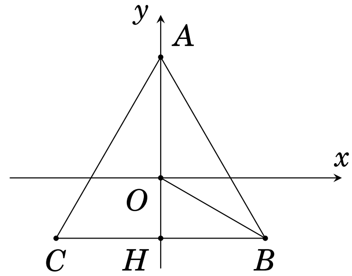
Câu 38.

Hàm số trùng phương có ba điểm cực trị khi

$ab < 0 \Leftrightarrow 1(-2m) < 0 \Leftrightarrow m > 0.$

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{array}\right.$.



Các điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$A(0; m-1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$ và $C(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$.

Ta có

$$\overrightarrow{OB} = (\sqrt{m}; -m^2 + m - 1),\ \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m}; -m^2),\ \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m}(-\sqrt{m}) + (-m^2 + m - 1)(-m^2) = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^4 - m^3 + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^3(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (do } m > 0).$$

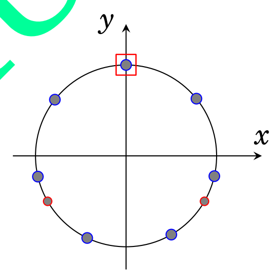
Chọn đáp án A

Câu 39.

Ta có

$$\cos 2x \sin 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 5x \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \sin 3x + \sin 7x = -2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin 7x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 7x = -\dfrac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{14} + l\dfrac{2\pi}{7} \end{cases}$$



Các nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ của họ $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}$ gồm có: $-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$.

Các nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ của họ $x = -\dfrac{\pi}{14} + l\dfrac{2\pi}{7}$ gồm có: $-\dfrac{5\pi}{14}, -\dfrac{\pi}{14}, \dfrac{3\pi}{14}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{14}, \dfrac{15\pi}{14}, \dfrac{19\pi}{14}, \dfrac{23\pi}{14}, \dfrac{27\pi}{14}$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ là $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án B

Câu 40. Ta có

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x}\,dx = \int_0^1 \frac{2(x-2)+7}{-(x-2)}\,dx = \int_0^1 \left(-2 - \frac{7}{x-2}\right) dx = \left(-2x - 7\ln|x-2|\right)\Big|_0^1$$

$$= (-2 - 7\ln 1) - (0 - 7\ln 2) = -2 + 7\ln 2.$$

Vậy $a = 7$, $b = -2$.

Chọn đáp án A

Câu 41. Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2). \qquad (1)$$

Xét hàm $f(t) = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_2(t+2) + \dfrac{2^t}{(t+2)\ln 2} > 0\ \forall t \in [0; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f\left((x-1)^2\right) = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=-2(x-m)\\(x-1)^2=2(x-m)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=2m-1\\x^2-4x+2m+1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x^2=2m-1 & (2)\\(x-2)^2=3-2m & (3)\end{array}\right.$$

Có 3 trường hợp sau có thể xảy ra

- **Trường hợp 1:** (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) có một nghiệm. Điều kiện cần là

$$\begin{cases}2m-1>0\\3-2m=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>\dfrac{1}{2}\\m=\dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}.$$

Khi đó (2) có hai nghiệm $x=\pm\sqrt{2}$ và (3) có một nghiệm $x=2$. Vậy $m=\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn.

- **Trường hợp 2:** (2) có một nghiệm và (3) có hai nghiệm phân biệt. Điều kiện cần là

$$\begin{cases}2m-1=0\\3-2m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\m<\dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}.$$

Khi đó (2) có một nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ và (2) có hai nghiệm $x=2\pm\sqrt{2}$. Vậy $m=\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn.

- **Trường hợp 3:** (2) và (3) đều có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm trùng. Điều kiện là

$$\begin{cases}2m-1>0\\3-2m>0\\ \left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{2m-1}-2\right)^2=3-2m\\ \left(-\sqrt{2m-1}-2\right)^2=3-2m\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}(2m-1)+4-4\sqrt{2m-1}=3-2m\\(2m-1)+4+4\sqrt{2m-1}=3-2m\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{2m-1}=m\\ \sqrt{2m-1}=-m\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2}\\2m-1=m^2\end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Chọn đáp án A

Câu 42. Từ $4xf(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$, ta có

$$\int_0^1 4xf(x^2)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 3f(1-x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

Xét tích phân $L = \int\limits_0^1 4xf(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ và $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = 1$. Suy ra

$$L = \int\limits_0^1 2f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2I.$$

Xét tích phân $K = \int\limits_0^1 3f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = 0$. Suy ra

$$K = \int\limits_1^0 3f(t)(-\mathrm{d}t) = 3\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 3\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3I.$$

Từ (1) suy ra

$$2I + 3I = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{20}.$$

Chọn đáp án C

Câu 43. Đặt $z_1 = 4w_1$, $z_2 = 3w_2$, $z_3 = 2w_3$ với $|w_1| = |w_2| = |w_3| = 1$. Thu được

$$|4\cdot 4w_1\cdot 3w_2 + 16\cdot 3w_2\cdot 2w_3 + 9\cdot 4w_1\cdot 2w_3| = 48 \Leftrightarrow |2w_1w_2 + 4w_2w_3 + 3w_1w_3| = 2. \quad (1)$$

Nhân vào hai vế của (1) với $|\overline{w_1}\overline{w_2}\overline{w_3}|$, với chú ý rằng $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$, $z\cdot\overline{z} = |z|^2$, $|w_i| = 1$, $w_i\cdot\overline{w_i} = |\overline{w_i}|^2 = 1$ $(i = 1,2,3)$, $|z| = |\overline{z}|$, ta được

$$|2\overline{w_3} + 4\overline{w_1} + 3\overline{w_2}| = 2 \Leftrightarrow |\overline{2w_3 + 4w_1 + 3w_2}| = 2$$

$$\Leftrightarrow |2w_3 + 4w_1 + 3w_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 2.$$

Vậy $P = 2$.

Chọn đáp án C

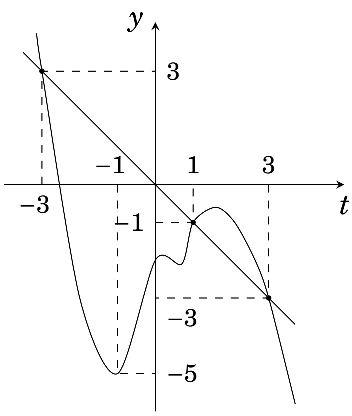
Câu 44.

Xét hàm số $g(x) = f(1-x) + \dfrac{x^2}{2} - x$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t$. Thu được

$h(t) = f(t) + \dfrac{(1-t)^2}{2} - (1-t) = f(t) + \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{1}{2}$.

Nhận xét rằng, nếu hàm số $h(t)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1-b;1-a)$.



Ta có $h'(t) = f'(t) + t$. Xét $h'(t) > 0 \Leftrightarrow f'(t) > -t$. (1)

Dựa vào đồ thị ta thấy (1) đúng khi $t \in (1;3)$ nên hàm số $h(t)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Từ nhận xét trên suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Chọn đáp án B

Câu 45. Số tự nhiên nhỏ hơn 10^6 có tối đa 6 chữ số.

Số các số tự nhiên nhỏ hơn 10^6, được lập từ hai chữ số 0 và 1 bằng

$2+2+2^2+2^3+2^4+2^5=64$ (số). Suy ra $\mathrm{n}(S)=64$.

Vì số cần lập chia hết cho 3 nên trong cấu tạo số của nó, hoặc không có chữ số 1 nào (là số 0), hoặc có đúng 3 chữ số 1, hoặc có đúng 6 chữ số 1 (là số 111111).

Xét số có 3 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và không có chữ số 0. Có thể lập được 1 số như thế.

Xét số có 4 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và một chữ số 0. Có thể lập được C_3^2 số như thế.

Xét số có 5 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và hai chữ số 0. Có thể lập được C_4^2 số như thế.

Xét số có 6 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và ba chữ số 0. Có thể lập được C_5^2 số như thế.

Vậy có thể lập được $3+\mathrm{C}_3^2+\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_5^2=22$ số chia hết cho 3.

Lấy 2 số từ S, có C_{64}^2 cách. Suy ra $\mathrm{n}(\Omega)=\mathrm{C}_{64}^2=2016$.

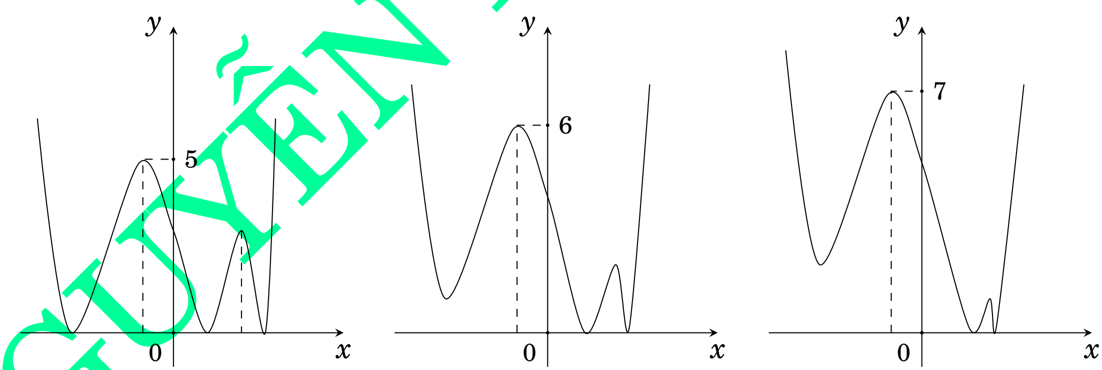
Gọi A là biến cố: "lấy ngẫu nhiên hai số từ S được ít nhất một số chia hết cho 3". Ta có

$\mathrm{n}(A)=\mathrm{C}_{22}^2+\mathrm{C}_{22}^1\cdot\mathrm{C}_{42}^1=1155$.

Vậy $\mathrm{P}(A)=\dfrac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(\Omega)}=\dfrac{1155}{2016}=\dfrac{55}{96}$.

Chọn đáp án C

Câu 46. Vì đồ thị của hàm số $f(x+1)$ được suy ra từ đồ thị của hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến qua trái 1 đơn vị nên hoành độ các điểm cực trị lần lượt giảm 1 đơn vị còn tung độ các điểm cực trị không thay đổi. Do đó, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $|f(x+1)|$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $|f(x)|$. Từ đó suy ra số điểm cực trị của đồ thị hàm số $|f(x+1)+m|$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $|f(x)+m|$.

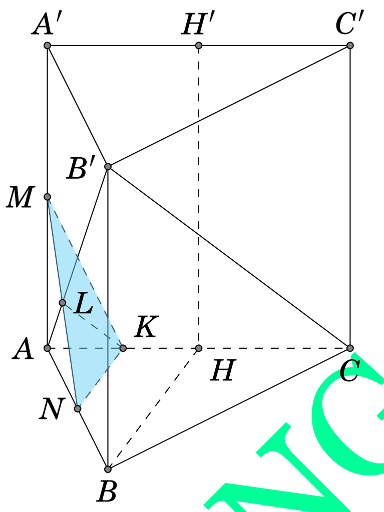


Bằng cách vẽ đồ thị tương ứng với các giá trị của m thuộc tập $\{1,2,3,4,5,6,\ldots\}$, ta thấy có 3 giá trị của m thỏa mãn là $\{3,4,5\}$ (quá trình này không phải vô hạn vì có thể loại trừ với $m\geq 6$).

Chọn đáp án C

Câu 47.

Gọi H và H' lần lượt là trung điểm của AC và $A'C'$, K là trung điểm của AH, L là giao của MN với AB'.



Ta có $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AL}{AB'} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow CB' \parallel AB' \Rightarrow CB' \parallel (MNK)$.
Từ đó $\mathrm{d}(CB';MN) = \mathrm{d}(C;(MNK))$.

Ta có

$$V_{\mathrm{M.CNK}} = \frac{1}{3}\cdot MA \cdot S_{\mathrm{NCK}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3a}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{64}.$$

$$S_{\mathrm{MNK}} = \frac{1}{2}\cdot NK \cdot KM = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{4} = \frac{a^2\sqrt{15}}{32}.$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}(C;(MNK)) = \frac{3V_{\mathrm{M.CNK}}}{S_{\mathrm{MNK}}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{64} \div \frac{a^2\sqrt{15}}{32} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}.$$

Vậy, $\mathrm{d}(MN, CB') = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Chọn đáp án B

Câu 48. Gọi $A(x_0; x_0^3 + x_0^2 + 3x_0 + 1)$ là một điểm thuộc (C) với $x_0 \in [1;3]$. Tiếp tuyến d của (C) tại A có phương trình

$$y = (3x_0^2 + 2x_0 + 3)(x - x_0) + x_0^3 + x_0^2 + 3x_0 + 1$$
$$\Leftrightarrow y = (3x_0^2 + 2x_0 + 3)x - 2x_0^3 - x_0^2 + 1.$$

Tiếp tuyến d qua $M(0;m)$ khi và chỉ khi

$$m = -2x_0^3 - x_0^2 + 1. \quad (1)$$

Điều kiện bài toán xảy ra khi phương trình (1) ẩn x_0 có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;3]$.
Xét hàm $f(t) = -2t^3 - t^2 + 1$ trên $[1;3]$.
Ta có $f'(t) = -6t^2 - 2t < 0,\ \forall t \in [1;3]$ nên hàm số nghịch biến trên $[1;3]$. Suy ra

$$f(3) = -62 \le f(t) \le f(1) = -2,\ \forall t \in [1;3]. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình (1) có nghiệm thuộc $[1;3]$ khi $-62 \le m \le -2$. Tương ứng có $-2 - (-62) + 1 = 61$ giá trị nguyên m.

Chọn đáp án A

Câu 49. Diện tích mặt ngoài

$$S_1 = 2\cdot 25\cdot 6 + 25\cdot 10 + 2\cdot\left(6\cdot 10 - \frac{1}{2}\pi\cdot 4^2\right) = 670 - 16\pi\ (\mathrm{m}^2).$$

Diện tích mái vòm và mặt dưới

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot\pi\cdot 25 + 2\cdot 1\cdot 25 = 100\pi + 50\ (\mathrm{m}^2).$$

Vậy diện tích mặt kính của bể cá bằng

$$S = S_1 + S_2 = 670 - 16\pi + 100\pi + 50 = 720 + 84\pi \simeq 984\ (\mathrm{m}^2).$$

Chọn đáp án C

Câu 50.

Đường thẳng Δ qua điểm $K(0;1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;1)$. Ta có $\overrightarrow{KA}=(1;1;-5)$, $\overrightarrow{KB}=(-1;-1;2)$. Suy ra $\left[\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}\right]=(-3;3;0)$ và $\left[\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}\right]\cdot\vec{u}=(-3)\cdot 1+3\cdot 1+0\cdot 1=0$.

Vậy đường thẳng AB và Δ đồng phẳng.

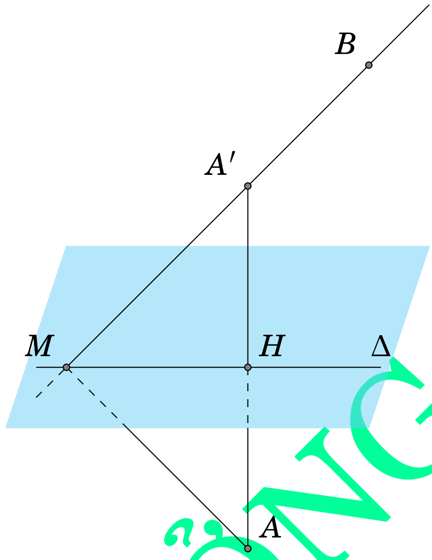
Gọi H là hình chiếu của A lên Δ

$\Rightarrow H(t;1+t;t)$, $\overrightarrow{AH}=(t-1;t-1;t+5)$.

Từ $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow 1\cdot(t-1)+1\cdot(t-1)+1\cdot(t+5)=0$

$\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow H(-1;0;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với AH.



Phương trình của (P): $-2(x+1)-2(y-0)+4(z+1)=0\Leftrightarrow x+y-2z-1=0$.

Vì $[1+2-2(-5)-1][-1+0-2\cdot 2-1]=12\cdot(-6)<0$ nên hai điểm A và B nằm trái phía đối với (P).

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ thì $A'(-3;-2;3)$.

Ta có

$$T=|MA-MB|=|MA'-MB|\le A'B.$$

Do đó $T_{\max}=A'B=\sqrt{(-1+3)^2+(0+2)^2+(2-3)^2}=3$, xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ và Δ.

Chọn đáp án A