(*Đề thi có 7 trang*)

ĐỀ ÔN TẬP THI THPT QUỐC GIA 2018
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút.

(Đề thi thử Đại học môn Toán - Sở Bắc Giang, năm học 2017-2018)

Mã đề thi 026

Họ và tên thí sinh:...............................

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

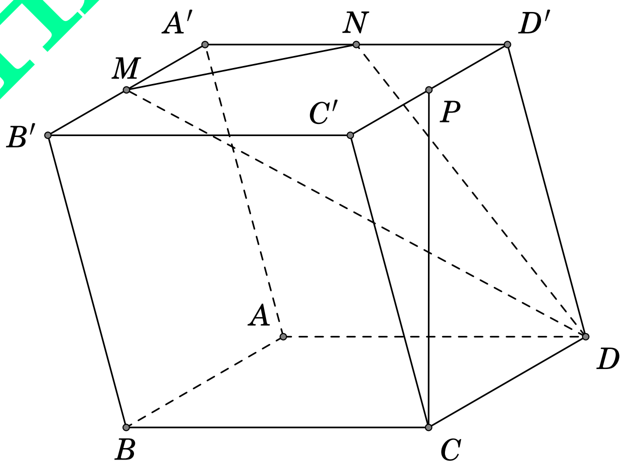
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. $(1;-4)$. **B.** $x = 0$. **C.** $(0;-3)$. **D.** $(-1;-4)$.

Câu 2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $A'D'$, $C'D'$ (hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (DMN) bằng



A. 30°.

B. 60°.

C. 45°.

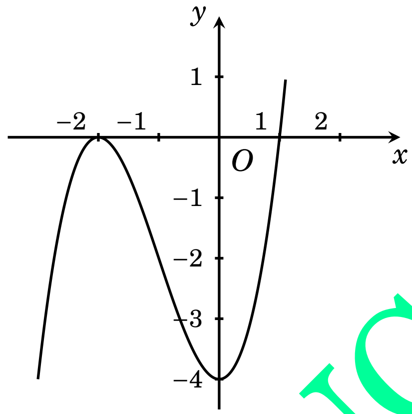
D. 0°.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-2;1)$.



Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và vuông góc với d có phương trình là

A. $x - y + 2z = 0$. **B.** $x - 2y - 2 = 0$. **C.** $x + y + 2z = 0$. **D.** $x - y - 2z = 0$.

Câu 6. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{\log_2 x}{\log_2(xy)+1} = \dfrac{\log_2 y}{\log_2(xy)-1} = \log_2 x + \log_2 y$. Tính $x + y$.

A. $x + y = 2$.

B. $x + y = 2$ hoặc $x + y = \sqrt[4]{8} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

C. $x + y = 2 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

D. $x + y = \dfrac{1}{2}$ hoặc $x + y = 2$.

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x\ln x$ tại điểm có hoành độ bằng e là

A. $y = 2x + 3\mathrm{e}$. **B.** $y = x + \mathrm{e}$. **C.** $y = \mathrm{e}x - 2\mathrm{e}$. **D.** $y = 2x - \mathrm{e}$.

Câu 8. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

B. $y = \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$.

C. $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

D. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Tọa độ điểm A là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (Oyz) là

A. $A(1;-2;0)$. **B.** $A(0;-2;3)$. **C.** $A(1;-2;3)$. **D.** $A(1;0;3)$.

Câu 11. Một người vay ngân hàng 500 triệu đồng với lãi suất 1,2% một tháng để mua xe. Nếu mỗi tháng người đó trả ngân hàng 10 triệu đồng và thời điểm bắt đầu trả cách thời điểm vay là đúng một tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người đó trả hết nợ ngân hàng? Biết rằng lãi suất không thay đổi.

A. 70 tháng. **B.** 80 tháng. **C.** 85 tháng. **D.** 77 tháng.

Câu 12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{2x+5}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x-z+1=0$. Tọa độ một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n}=(2;-1;1)$. **B.** $\vec{n}=(2;0;-1)$. **C.** $\vec{n}=(2;-1;0)$. **D.** $\vec{n}=(2;0;1)$.

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[-1;4]$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -4.

Câu 15. Cho số phức $z=-1+2i$. Số phức $\overline{z}$ được biểu diễn bởi điểm nào dưới đây trên mặt phẳng tọa độ?

A. $P(1;2)$. **B.** $M(-1;2)$. **C.** $N(1;-2)$. **D.** $Q(-1;-2)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	1

Số nghiệm của phương trình $2(f(x))^2-3f(x)+1=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 0.

Câu 17. Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A. $V=Bh$. **B.** $V=\dfrac{1}{3}Bh$. **C.** $V=\dfrac{1}{6}Bh$. **D.** $V=\dfrac{1}{2}Bh$.

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2-4}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};4\right]$ là

A. $-\dfrac{25}{6}$. **B.** -2. **C.** -5. **D.** -4.

Câu 19. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' bằng

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 20. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=2+\dfrac{3}{1-x}$ là

A. $y=3$. **B.** $y=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $y=2$.

Câu 21. Cho $P=\log_{a^4}b^2$ với $0<a\neq1$ và $b<0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P=-\dfrac{1}{2}\log_a(-b)$. **B.** $P=2\log_a(-b)$. **C.** $P=-2\log_a(-b)$. **D.** $P=\dfrac{1}{2}\log_a(-b)$.

Câu 22. Một lô hàng gồm 30 sản phẩm trong đó có 20 sản phẩm tốt và 10 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm trong lô hàng. Tính xác suất để 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt.

A. $\dfrac{6}{203}$. **B.** $\dfrac{57}{203}$. **C.** $\dfrac{197}{203}$. **D.** $\dfrac{153}{203}$.

Câu 23. Cho $\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx = 3$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-2}^{1} [2f(x) - 1]\,dx$.

A. -9. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 5.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Câu 25. Có bao nhiêu số có hai chữ số khác nhau và đều khác 0?

A. 9^2. **B.** A_9^2. **C.** 90. **D.** C_9^2.

Câu 26. Tích phân $\int\limits_{1}^{2} (x+3)^2\,dx$ bằng

A. $\dfrac{61}{9}$. **B.** 4. **C.** 61. **D.** $\dfrac{61}{3}$.

Câu 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos 2x$ là

A. $-\sin 2x + C$. **B.** $-2\sin 2x + C$. **C.** $\sin 2x + C$. **D.** $2\sin 2x + C$.

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm M, cắt và vuông góc với Δ là

A. $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$. **B.** $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$. **C.** $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 4t \\ z = 2t \end{cases}$. **D.** $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$.

Câu 29. Bảng biến thiên trong hình bên là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A. $y = x^4 - 2x^2 - 3$. **B.** $y = -x^3 + 3x + 2$. **C.** $y = x^3 - 3x + 4$. **D.** $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$.

Câu 30. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^3 = 13n$, hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^n$ bằng

A. 120. **B.** 45. **C.** 252. **D.** 210.

Câu 31. Cho $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \dfrac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}}\,dx = a + b\sqrt{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Khi đó giá trị của a là

A. $\frac{26}{27}$. **B.** $-\frac{26}{27}$. **C.** $-\frac{27}{26}$. **D.** $-\frac{25}{27}$.

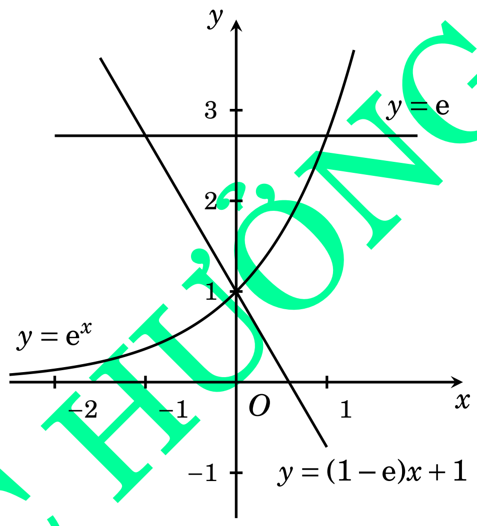
Câu 32. Tập hợp nào sau đây chứa tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5?

A. $(-5;-2)\cup(0;3)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-6;-3)\cup(0;2)$. **D.** $(-4;3)$.

Câu 33.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}$, $y = \mathrm{e}^x$ và $y = (1-\mathrm{e})x + 1$ (tham khảo hình vẽ bên). Diện tích của (H) là

A. $S = \frac{\mathrm{e}+1}{2}$. **B.** $S = \mathrm{e} + \frac{1}{2}$. **C.** $S = \mathrm{e} + \frac{3}{2}$. **D.** $S = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$.



Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là -2; -1; 0 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính $|z|$.

A. 3. **B.** 5. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $f(-3) + f(3) = 0$. Tính giá trị của biểu thức $f(0) + f(4)$.

A. $P = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. **C.** $1 + \ln\frac{3}{5}$. **D.** $\ln\frac{3}{5} + 2$.

Câu 37. Cho hình chóp đa giác đều có các cạnh bên bằng a và tạo với đáy của hình chóp một góc $30°$. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $4\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 38. Cho hàm số $y = x(x^2 - 3)$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) thỏa mãn tiếp tuyến tại M của (C) cắt (C) và trục hoành lần lượt tại hai điểm phân biệt A (khác M) và B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m + \sqrt{m + \mathrm{e}^x}} = \mathrm{e}^x$ có nghiệm thực?

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 40. Cho phương trình $\log_{0,5}(m+6x)+\log_2(3-2x-x^2)=0$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có nghiệm thực?

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 17.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)=(a^2+1)\ln^{2017}(x+\sqrt{1+x^2})+bx\sin^{2018}x+2$ với a,b là các số thực và $f(7^{\log 5})=6$. Tính $f(-5^{\log 7})$.

A. $f(-5^{\log 7})=4$. **B.** $f(-5^{\log 7})=-2$. **C.** $f(-5^{\log 7})=2$. **D.** $f(-5^{\log 7})=6$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\mathrm{e}-2$. **B.** $I=2-\mathrm{e}$. **C.** $I=\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2;2;1)$, $K\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB. Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $d:\dfrac{x+\frac{4}{9}}{1}=\dfrac{y-\frac{17}{9}}{-2}=\dfrac{z-\frac{19}{9}}{2}$. **B.** $d:\dfrac{x-\frac{8}{3}}{1}=\dfrac{y-\frac{2}{3}}{-2}=\dfrac{z+\frac{2}{3}}{2}$.

C. $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z-6}{2}$. **D.** $d:\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng (P): $x+my+(2m+1)z-(2+m)=0$, với m là tham số. Gọi điểm $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P). Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất.

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=\dfrac{3}{2}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$ và điểm $A(1;2;3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của ba hình tròn tương ứng đó.

A. 10π. **B.** 36π. **C.** 38π. **D.** 33π.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=3$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC=2\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên hai cạnh SA, SB lấy các điểm P, Q tương ứng sao cho $SP=1$, $SQ=2$. Tính thể tích V của khối tứ diện $MNPQ$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{34}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{7}}{18}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{34}}{144}$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t=x\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=\dfrac{\pi-1}{4}$. **B.** $f(4)=\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $f(4)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $f(4)=\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 48. Có 2 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B và 4 học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy?

A. 145152. **B.** 108864. **C.** 217728. **D.** 80640.

Câu 49. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $\begin{cases} |z-3-2i| \le 1 \\ |w+1+2i| \le |w-2-i| \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |z-w|$.

A. $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{2}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$. **C.** $P_{\min} = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$. **D.** $P_{\min} = \sqrt{2}+1$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

— **HẾT** —

Đáp án và lời giải chi tiết

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 C	**6** B	**11** D	**16** B	**21** D	**26** D	**31** A	**36** B	**41** B	**46** C
2 D	**7** D	**12** B	**17** A	**22** C	**27** C	**32** A	**37** A	**42** A	**47** B
3 C	**8** C	**13** B	**18** D	**23** B	**28** A	**33** A	**38** C	**43** D	**48** A
4 C	**9** B	**14** B	**19** D	**24** C	**29** B	**34** C	**39** B	**44** D	**49** C
5 A	**10** B	**15** D	**20** D	**25** B	**30** A	**35** B	**40** D	**45** C	**50** A

LỜI GIẢI CHI TIẾT CÁC CÂU

Câu 1. Qua $x = 0$ đạo hàm của hàm số đổi dấu từ dương sang âm nên đồ thị hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow$ tọa độ điểm cực đại là $(0; -3)$.
Chọn đáp án C

Câu 2. **Phân tích:** Để xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, cần xác định được hình chiếu vuông góc của CP lên (DMN), nhưng đề bài lại chỉ cho hình hộp, vì vậy các yếu tố vuông góc là rất khó tìm ra. Mặt khác nhìn hình vẽ, việc hình dung hình chiếu nằm ở đâu là rất khó khăn. Như vậy có thể suy đoán là $CP \parallel (DMN)$ (vì đáp án có $0°$).
Thật vậy, vì P, M lần lượt là trung điểm của $C'D'$ và $A'B'$ nên $CP \parallel BM$, mà $MN \parallel BD$ (do M, N là trung điểm $A'B'$, $A'D'$) nên $(DMN) \equiv (BDNM)$, suy ra $CP \parallel (BDNM)$.
Vậy góc giữa CP và (DMN) bằng $0°$.
Chọn đáp án D

Câu 3. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.
Xét trường hợp $m > 0$, đồ thị hàm có 3 điểm cực trị và có bảng biến thiên như hình dưới

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để hàm số đồng biến trên $(1;2)$ thì $0 < \sqrt{m} \leq 1 \Leftrightarrow m = 1$ (do $m \in \mathbb{Z}$).
Xét trường hợp $m = 0$, thì $y' = 4x^3 > 0\ \forall x \in (1;2)$ suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.
Vậy với $m = 0 \vee m = 1$ thì yêu cầu bài toán được thỏa mãn.
Chọn đáp án C

Câu 5. Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến cùng phương với véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d, suy ra $\vec{n}_{(P)} = (1;-1;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

$$1(x-2)-1(y-0)+2(z+1)=0 \Leftrightarrow x-y+2z=0.$$

Chọn đáp án A

Câu 6. Điều kiện xác định $x>0, y>0, xy \neq \frac{1}{2}$ và $xy \neq 2$.

$$\frac{\log_2 x}{\log_2(xy)+1} = \log_2 x + \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2^2(xy) + \log_2(xy)$$
$$\frac{\log_2 y}{\log_2(xy)-1} = \log_2 x + \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 y = \log_2^2(xy) - \log_2(xy)$$

Cộng hai biểu thức trên vế theo vế ta được

$$\log_2 x + \log_2 y = 2\log_2^2(xy) \Leftrightarrow \log_2(xy) = 2\log_2^2(xy) \Leftrightarrow \log_2(xy) = 0 \vee \log_2(xy) = \frac{1}{2}.$$

Với $\log_2(xy) = 0 \Leftrightarrow xy = 1$, ta có $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.
Với $\log_2(xy) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow xy = \sqrt{2}$, ta có $\log_2 x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{8} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
Chọn đáp án B

Câu 7. Tại điểm có hoành độ bằng e thì tung độ $y = \mathrm{e}$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $(\mathrm{e};\mathrm{e})$ là

$$y = f'(x_0)(x-\mathrm{e}) + \mathrm{e} \Leftrightarrow y = (\ln \mathrm{e} + 1)(x-\mathrm{e}) + \mathrm{e} \Leftrightarrow y = 2x - \mathrm{e}.$$

Chọn đáp án D

Câu 8. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ có tiệm cận ngang $y = 3$.
Chọn đáp án C

Câu 9. $y' = \frac{4-m^2}{(x+4)^2}$.
Để hàm số đồng biến thì $4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.
Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B

Câu 10. Điểm nằm trên mặt phẳng Oyz thì có hoành độ bằng 0.
Chọn đáp án B

Câu 11. Bài toán thuộc dạng bài toán vay vốn trả góp, có công thức tổng quát tính số tiền còn lại sau n tháng là

$$S = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Từ giả thiết ta có

$$500(1+0,012)^n - 10\frac{(1+0,012)^n - 1}{0,012} = 0 \Leftrightarrow n = 77.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 12. Vì khi $x \to -\infty$ thì $2x+5 \to -\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{2x+5} = 0$.

Chọn đáp án (B)

Câu 13. Câu hỏi sử dụng kiến thức cơ bản.

Chọn đáp án (B)

Câu 14. $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ta có $y(-1) = 3$; $y(1) = -1$; $y(4) = 53$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 đạt tại $x = 1$.

Chọn đáp án (B)

Câu 15. $\overline{z} = -1 - 2i \Rightarrow \overline{z}$ được biểu diễn bởi điểm $(-1;-2)$.

Chọn đáp án (D)

Câu 16.

$$2(f(x))^2 - 3f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \vee f(x) = \frac{1}{2}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x) = 1$ có đúng 1 nghiệm, $f(x) = \frac{1}{2}$ có đúng 2 nghiệm.

Chọn đáp án (B)

Câu 17. Câu hỏi lý thuyết cơ bản.

Chọn đáp án (A)

Câu 18.

$$y' = \frac{4}{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Ta có $f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq -4,17$; $f(2) = -4$; $f(4) = -5$. Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là -4 tại $x = 2$.

Chọn đáp án (D)

Câu 19. Kẻ $BH \perp AC$ tại H, suy ra BH là đoạn vuông góc chung của AC và BB'. BH là đường cao của tam giác đều nên $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 + \frac{3}{1-x}\right) = 2$.

Chọn đáp án (D)

Câu 21. $P = \log_{a^4} b^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\log_a(-b) = \frac{1}{2}\log_a(-b)$ (vì $b < 0$).

Chọn đáp án (D)

Câu 22. Không gian mẫu ở đây là: lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm trong lô hàng, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{30}^3$.

Gọi A là biến cố ba sản phẩm lấy ra đều là sản phẩm xấu, suy ra $\overline{A}$ là biến cố ba sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt.

Xác suất để ba sản phẩm lấy ra đều là sản phẩm xấu là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_{10}^3}{\mathrm{C}_{30}^3} = \dfrac{6}{203}$.

Xác suất để 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt là $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{6}{203} = \dfrac{197}{203}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 23. $I = \displaystyle\int_{-2}^{1} [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x = 2\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{1} \mathrm{d}x = 3.$

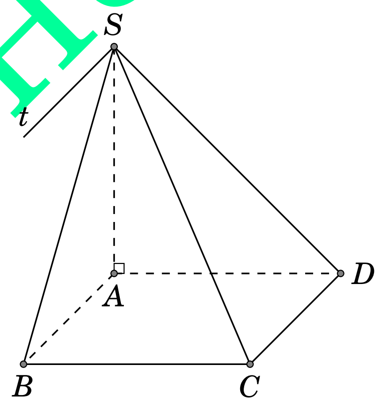
Chọn đáp án (B)

Câu 24.

$(SAB) \cap (SCD) = St$ với St là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với AB và CD.

Vì $CD \perp (SAD)$ và $St \parallel CD$ nên $St \perp (SAD)$. Suy ra $SA \perp St$ và $SD \perp St$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) chính là góc giữa SA và SD.

Từ giả thiết ta suy ra $\triangle SAD$ vuông cân tại A. Vậy $\widehat{ASD} = 45°$.



Chọn đáp án (C)

Câu 25. Các số thỏa yêu cầu bài toán có thể được lập thành bằng cách lấy 2 trong 9 phần tử từ 1 đến 9. Vậy số cách chọn là A_9^2.

Chọn đáp án (B)

Câu 26.

$$\int_1^2 (x+3)^2\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (x^2 + 6x + 9)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 9x\right)\Big|_1^2 = \frac{61}{3}.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 27.

$$\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 28. Gọi $A(1+2t;-1+t;-t)$ là điểm thuộc Δ. Ta có $\overrightarrow{MA}=(2t-1;t-2;-t)$; $\vec{u}_\Delta=(2;1;-1)$.

$$MA\perp\Delta\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+(t-2)-1(-t)=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}.$$

Suy ra một vec-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d=(1;-4;-2)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 29. Nhìn bảng biến thiên ta thấy đây là dáng điệu của một hàm số bậc ba, và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ nên hệ số $a<0$.

Chọn đáp án (B)

Câu 30. Điều kiện $n\in\mathbb{N}^*$ và $n\geq 3$.

$$\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^3=13n\Leftrightarrow\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}=13n\Leftrightarrow n+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)=13n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=-7\text{ (loại)}\\ n=0\text{ (loại)}\\ n=10\end{array}\right.$$

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$ là $\mathrm{C}_{10}^k\left(x^2\right)^k\left(x^{-3}\right)^{10-k}$.

Số hạng chứa x^5 ứng với k thỏa mãn $2k-3(10-k)=5\Leftrightarrow k=7$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_{10}^7=120$.

Chọn đáp án (A)

Câu 31. Nhân cả tử và mẫu với lượng liên hợp của $3x+\sqrt{9x^2-1}$ ta được

$$I=\int\limits_{\frac13}^{1}\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac13}^{1}x(3x-\sqrt{9x^2-1})\,\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac13}^{1}x^2\,\mathrm{d}x-\int\limits_{\frac13}^{1}x\sqrt{9x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Đặt $u=9x^2-1\Rightarrow\mathrm{d}u=18x\,\mathrm{d}x$ và đổi cận, ta được

$$I=x^3\Big|_{\frac13}^{1}-\frac{1}{18}\int\limits_{\frac13}^{1}\sqrt{9x^2-1}\cdot18x\,\mathrm{d}x=x^3\Big|_{\frac13}^{1}-\frac{1}{18}\int\limits_0^8\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\frac{26}{27}+\left(-\frac{u^{\frac32}}{27}\right)\Bigg|_0^8=\frac{26}{27}-\frac{16\sqrt2}{27}.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 32. Xét hàm số $y=x^2-2x+m$ có $\Delta'=1-m$.

Trường hợp $\Delta'\leq0\Leftrightarrow m\geq1$ thì $x^2-2x+m\geq0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow|x^2-2x+m|=x^2-2x+m$.

Hàm số $y=x^2-2x+m$ là một parabol có bề lõm hướng lên nên chỉ có thể đạt giá trị lớn nhất tại $x=-1$ hoặc $x=2$.

Ta có $y(-1)=m+3$, $y(2)=m$. Vì $m+3>m$ khi $m\geq1$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $y(-1)=m+3=5\Leftrightarrow m=2$.

Trường hợp $\Delta'>0\Leftrightarrow m<1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1-\sqrt{1-m}$		1		$1+\sqrt{1-m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-m+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy khi $m=-4$ thì hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

Chọn đáp án A

Câu 33. Dựa vào hình vẽ, ta xác định nhanh các hoành độ giao điểm của từng cặp đồ thị hàm số lần lượt là $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

$$S=\int_{-1}^{0}(\mathrm{e}-(1-\mathrm{e})x+1)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}+1}{2}$$

Chọn đáp án A

Câu 34.

$$y=f(x^2-2x)\Rightarrow y'=(2x-2)f'(x^2-2x)$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\f'(x^2-2x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\text{ (nghiệm bội 3)}\\x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Vậy hàm số $y=f(x^2-2x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C

Câu 35. Gọi $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

Theo giả thiết ta có

$$\sqrt{a^2+b^2}-2(a-bi)=-7+3i+a+bi\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-3a+7+(b-3)i=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-3a+7=0\\b-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+9}=3a-7\\b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+9=(3a-7)^2\\3a-7\geq 0\\b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{4}\text{ (loại)}\\a=4\\b=3\end{cases}$$

Vậy $|z|=5$.

Chọn đáp án B

Câu 36.

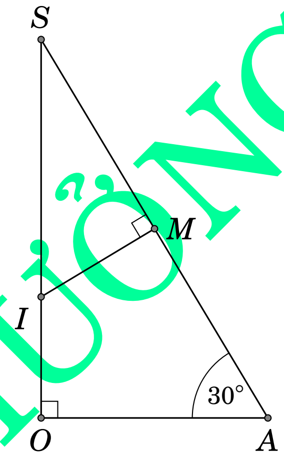
$$f'(x)=\frac{1}{x^2-1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C.$$

Theo giả thiết, ta có

$$f(-3)+f(3)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+2C=0 \Leftrightarrow C=0.$$

Vậy $f(0)+f(4)=\frac{1}{2}\ln 1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+2C=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.
Chọn đáp án B

Câu 37.



Xét tam giác SOA vuông tại A có $\widehat{SAO}=30°$. Khi cho tam giác này quay quanh trục SO ta được một hình nón. Đa giác đều thỏa mãn yêu cầu đề bài là đa giác đều bất kì nội tiếp trong hình nón ta vừa dựng được. Hình cầu ngoại tiếp hình nón cũng là hình cầu ngoại tiếp đa giác đều đã cho.

Dựng đường trung trực của SA, cắt SA tại M và cắt SO tại I, suy ra I là tâm hình cầu và bán kính hình cầu là SI.

Do $\triangle SMI \sim \triangle SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO}=\frac{SI}{SA} \Rightarrow SI=\frac{SM\cdot SA}{SO}=\frac{a\cdot\frac{a}{2}}{a\sin 30°}=a$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp cần tìm là $\frac{4\pi a^3}{3}$.

Chọn đáp án A

Câu 38. Ta có $y=x(x^2-3)=x^3-3x \Rightarrow y'=3x^2-3$.

Vì điểm M và điểm A thuộc (C) nên ta gọi tọa độ hai điểm này lần lượt là $M(x_M;x_M^3-3x_M)$ và $A(x_A;x_A^3-3x_A)$. Điểm B nằm trên trục hoành nên ta gọi điểm B có tọa độ là $B(x_B;0)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là

$$d: y=3(x_M^2-1)(x-x_M)+x_M^3-3x_M$$

Nếu $x_M=\pm 1$ thì tại M có hai tiếp tuyến với (C) lần lượt là $y=2$ và $y=-2$ (không thỏa mãn đề bài).

Vì $B\in d$ nên $0=3(x_M^2-1)(x_B-x_M)+x_M^3-3x_M \Rightarrow x_B=x_M+\frac{-x_M^3+3x_M}{3(x_M^2-1)}=\frac{2x_M^2}{3(x_M^2-1)}$.

Vì $A\in d$ nên

$$x_A^3-3x_A=3(x_M^2-1)(x_A-x_M)+x_M^3-3x_M$$
$$\Leftrightarrow x_A^3-3x_A=3(x_M^2-1)x_A-2x_M^3 \Leftrightarrow x_A^3-3x_A=3x_M^2x_A-3x_A-2x_M^3$$
$$\Leftrightarrow x_A^3-3x_M^2x_A+2x_M^3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x_A}{x_M}=-2\\ \frac{x_A}{x_M}=1\end{array}\right..$$

Xét trường hợp $x_A=-2x_M$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có $x_A+x_B=2x_M \Rightarrow x_B=4x_M \Leftrightarrow \frac{2x_M^2}{3(x_M^2-1)}=4x_M$.

$$\Rightarrow 2x_M^2=12x_M(x_M^2-1) \Leftrightarrow 2x_M(-6x_M^2+x_M+6)=0$$

Nếu $x_M = 0 \Rightarrow x_A = 0$, suy ra điểm A trùng điểm M nên trường hợp này bị loại.

Phương trình $-6x_M^2 + x_M + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên tồn tại hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Xét trường hợp $x_A = x_M$, suy ra điểm A trùng điểm M nên trường hợp này bị loại. Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C

Câu 39. Điều kiện xác định: $m + \sqrt{m + e^x} > 0$ và $m + e^x > 0$.

Đặt $u = e^x > 0$. Phương trình đã cho trở thành $\sqrt{m + \sqrt{m+u}} = u$.

Đặt $v = \sqrt{m+u} > 0$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u = \sqrt{m+v} \\ v = \sqrt{m+u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = m+v \\ v^2 = m+u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = v - u \Leftrightarrow (u-v)(u+v+1) = 0 \Leftrightarrow u = v \text{ (do u,v>0)}$$

Phương trình trở thành $\sqrt{m+u} = u \Leftrightarrow \sqrt{m+e^x} = e^x \Leftrightarrow m = e^{2x} - e^x = u^2 - u \geq -\frac{1}{4}$.

Do m là số nguyên nhỏ hơn 10 nên có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B

Câu 40. Điều kiện xác định: $\begin{cases} -3 < x < 1 \\ x > -\dfrac{m}{6}. \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$-\log_2(m+6x) + \log_2(3-2x-x^2) = 0 \Leftrightarrow \log_2\frac{3-2x-x^2}{m+6x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3-2x-x^2}{m+6x} = 1$$
$$\Leftrightarrow 3-2x-x^2 = m+6x \Leftrightarrow 3-8x-x^2 = m.$$

Xét hàm số $f(x) = 3-8x-x^2$ là hàm bậc hai nên trên khoảng $(-3;1)$, $f(x)$ nghịch biến, suy ra $\min\limits_{[-3;1]} f(x) = -6$, $\max\limits_{[-3;1]} f(x) = 18$. Vậy có 17 giá trị nguyên dương của m để phương trình có nghiệm thực.

Chọn đáp án D

Câu 41. Nhận xét: $7^{\log 5} = 5^{\log 7} = -(-5^{\log 7})$.

Xét hàm số $f(-x) = (a^2+1)\ln^{2017}(-x+\sqrt{1+x^2}) - bx\sin^{2018}x + 2$.

Ở biểu thức chứa logarit tự nhiên, ta nhân với lượng liên hợp của $-x+\sqrt{1+x^2}$ và biến đổi, được kết quả là

$$f(-x) = -(a^2+1)\ln^{2017}(x+\sqrt{1+x^2}) - bx\sin^{2018}x + 2.$$

Suy ra $f(-5^{\log 7}) = -\left(f(7^{\log 5}) - 2\right) + 2 = -2$.

Chọn đáp án B

Câu 42. Tính $\int\limits_0^1 (x+1)e^x f(x)\,dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)\,dx \\ v = xe^x \end{cases}$.

$$\int\limits_0^1 (x+1)e^x f(x)\,dx = xe^x f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,dx = ef(1) - \int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,dx = -\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,dx$$

Mà $\int_0^1 (x+1)e^x f(x)\,dx = \frac{e^2-1}{4} \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x)\,dx = \frac{1-e^2}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left(\frac{1-e^2}{4}\right)^2 = \left(\int_0^1 xe^x f'(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_0^1 (xe^x)^2\,dx\right)\left(\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-e^2}{4}\right)^2 \le \frac{e^2-1}{4}\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx \Leftrightarrow \frac{e^2-1}{4} \le \int_0^1 [f'(x)]^2\,dx$$

Dấu bằng xảy ra khi $f'(x) = axe^x$, với $a \in \mathbb{R}$.

Ta có $\int_0^1 xe^x f'(x)\,dx = \frac{1-e^2}{4} \Rightarrow \int_0^1 a(xe^x)^2\,dx = \frac{1-e^2}{4} \Leftrightarrow a\cdot\frac{e^2-1}{4} = \frac{1-e^2}{4} \Leftrightarrow a = -1$.

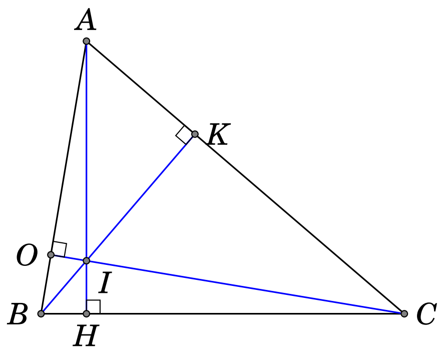
Suy ra $f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = -e^x(x-1)+C$, mà $f(1)=0$ nên $C=0$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 -e^x(x-1)\,dx = e-2$.

Chọn đáp án A

Câu 43.

Gọi I là trực tâm của tam giác OHK. Trước tiên ta chứng minh rằng trực tâm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK.



Các tứ giác $BOKC$, $BOIH$, $CKIH$ là các tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{OBI} = \widehat{OHI}; \widehat{OBK} = \widehat{OCK}; \widehat{KCI} = \widehat{KHI} \Rightarrow \widehat{OHI} = \widehat{KHI}$$

Suy ra HI là phân giác của góc OHK. Tương tự KI cũng là phân giác góc HKO.

Vậy I chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OHK.

Xét bài toán: Cho tam giác ABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh. Khi đó ta có $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. (Xem chứng minh ở bài tập số 37 trang 30 sách bài tập hình học 10 nâng cao của NXB Giáo Dục).

Áp dụng bài toán trên cho $\triangle OKH$, ta được $KH\cdot\overrightarrow{IO} + KO\cdot\overrightarrow{IH} + OH\cdot\overrightarrow{IK} = \vec{0}$ (*).

Ta có $OH = 3$, $OK = 4$, $HK = 5$; Gọi điểm I có tọa độ là (a,b,c).

$\overrightarrow{IO} = (-a;-b;-c)$, $\overrightarrow{IH} = (2-a;2-b;1-c)$, $\overrightarrow{IK} = \left(-\frac{8}{3}-a;\frac{4}{3}-b;\frac{8}{3}-c\right)$.

Từ (*) ta có $\begin{cases} -5a+4(2-a)+3\left(-\frac{8}{3}-a\right)=0 \\ -5b+4(2-b)+3\left(\frac{4}{3}-b\right)=0 \\ -5c+4(1-c)+3\left(\frac{8}{3}-c\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

Do đó $I(0;1;1)$. Mặt khác, ta có $[\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OK}] = (4;-8;8)$. Suy ra vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng

ABC là $\vec{n} = (1;-2;2)$.

Phương trình đường thẳng IH là $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$.

Đường thẳng AB có một vec-tơ chỉ phương là $[\overrightarrow{OI}, \vec{n}] = (4;1;-1)$ (do $OI \perp AB$).

Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 4t' \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$.

AB cắt IH tại A, suy ra $A(-4;-1;1)$.

Vậy đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$d: \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

.

Chọn đáp án D

Câu 44. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là

$$d_{[A;(P)]} = \frac{|2 + m + 3(2m+1) - (2+m)|}{\sqrt{1 + m^2 + (2m+1)^2}} = \sqrt{\frac{9(2m+1)^2}{1 + m^2 + (2m+1)^2}}.$$

Xét hàm số $f(m) = \dfrac{(2m+1)^2}{1 + m^2 + (2m+1)^2} \Rightarrow f'(m) = -\dfrac{2(m-2)(2m+1)}{(5m^2+4m+2)^2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(m)$.

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{4}{5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{6}$	$\searrow$	$\frac{4}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f(m)$ đạt giá trị lớn nhất tại $m = 2$.

Khi $m = 2$ thì mặt phẳng (P) trở thành (P): $x + 2y + 5z - 4 = 0$.

Phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) là $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$.

Giao điểm của d và (P) chính là điểm H. Tọa độ của H thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + 5z - 4 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + t + 2(1+2t) + 5(3+5t) - 4 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{11}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 45. Vì tổng diện tích của ba hình tròn luôn không đổi, nên ta có thể chọn ba mặt phẳng đặc biệt đi qua A và đôi một vuông góc với nhau đó là mặt phẳng $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Giao điểm của (S) với mặt phẳng $x = 1$ là $(y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$.

Giao điểm của (S) với mặt phẳng $y = 2$ là $(x-1)^2 + (z-2)^2 = 16 - 9 = 7$.

Giao điểm của (S) với mặt phẳng $z = 3$ là $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16 - 1 = 15$.

Vậy tổng diện tích của ba hình tròn là $\pi(16+7+15) = 38\pi$.

Chọn đáp án (C)

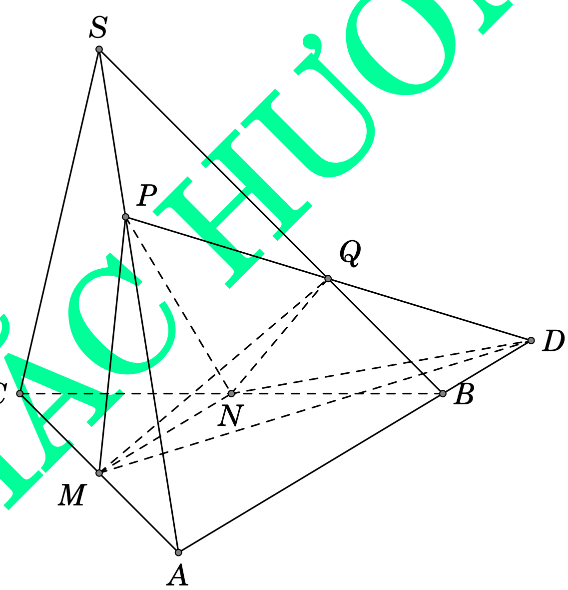
Câu 46.

Do $SA = SB = SC$ nên hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng ABC phải trùng với điểm M (vì $\triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow MA = MB = MC$.

Theo giả thiết ta tính được $BA = BC = 2$, $MA = MC = \sqrt{2}$.

Gọi $D = PQ \cap AB$.

Ta có $S_{DMN} = S_{AMN} = \dfrac{1}{4} S_{ABC}$.



$$\frac{SP}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{PA}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_{(S;(ABC))} = \frac{3}{2} d_{(P;(ABC))}.$$

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{P.MND}} = \frac{d_{(S;(ABC))} \cdot S_{ABC}}{d_{(P;(ABC))} \cdot S_{DMN}} = 6.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SM \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{SA^2 - AM^2}}{3 \cdot 0{,}5 \cdot AB \cdot BC} = \frac{2\sqrt{7}}{3}.$$

Theo định lý Menelaus ta có $\dfrac{PS}{PA} \cdot \dfrac{DA}{DB} \cdot \dfrac{QB}{QS} = 1 \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = 4$.

$$\frac{BD}{BA} \cdot \frac{SA}{SP} \cdot \frac{QP}{QD} = 1 \Rightarrow \frac{QP}{QD} = 1.$$

$$\frac{V_{P.QMN}}{V_{P.DMN}} = \frac{PQ}{PD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{P.QMN} = \frac{1}{2} V_{P.DMN} = \frac{1}{12} V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{7}}{18}.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 47. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)\Big|_0^{x^2} = F(x^2) - F(0) = x\sin(\pi x)$.

Lấy đạo hàm hai vế, ta được $2xF'(x^2) = \sin\pi x + \pi x\cos\pi x$.

Thay $x = 2$ vào ta được $4F'(4) = 2\pi \Leftrightarrow F'(4) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(4) = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 48. Có các trường hợp xảy ra như sau:

- Hai học sinh lớp A luôn đứng cạnh nhau, các học sinh lớp còn lại xếp tùy ý: $2!8!$.
- Có đúng một học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^1 2!7!$.
- Có đúng hai học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^2 2!6!$.
- Có đúng ba học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^3 2!5!$.
- Có đúng bốn học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^4 2!4!$.

Vậy có $2!8! + A_4^1 2!7! + A_4^2 2!6! + A_4^3 2!5! + A_4^4 2!4! = 145152$ cách xếp hàng thỏa đề bài.

Chọn đáp án (A)

Câu 49. Gọi $z = x + yi$ và $w = a + bi$ với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} |z-3-2i| \le 1 \\ |w+1+2i| \le |w-2-i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+yi-3-2i| \le 1 \\ |a+bi+1+2i| \le |a+bi-2-i| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} \le 1 \\ \sqrt{(a+1)^2+(b+2)^2} \le \sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2 \le 1 \\ a+b \le 0 \end{cases}$$

Vậy điểm biểu diễn hai số phức z và w trên mặt phẳng tọa độ Oxy tương ứng là điểm thuộc hình tròn $(x-3)^2+(y-2)^2 = 1$ và nửa mặt phẳng được giới hạn bởi phương trình $x + y = 0$. Bài toán yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z - w| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, nghĩa là tìm khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm biểu diễn của z và w.

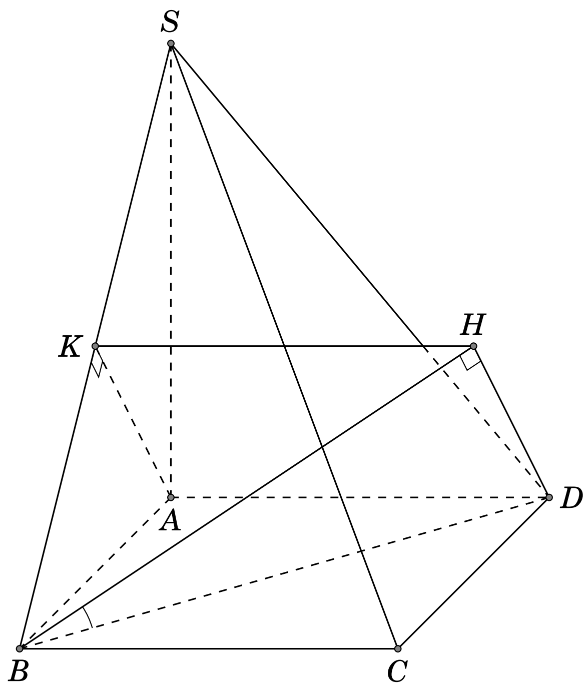
Khoảng cách đó là $d_{(I;d)} - R = \dfrac{|3+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} - 1 = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 50.

Kẻ $AK \perp SB$ tại K, qua K kẻ đường thẳng d song song với BC, sau đó kẻ $DH \perp d$ tại H. Suy ra góc tạo bởi đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) là góc $\alpha = \widehat{HBD}$.

$$\sin\alpha = \frac{HD}{BD} = \frac{AK}{BD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



Chọn đáp án (A)